



Espace des représentations du groupe d'un nœud dans les groupes de lie résolubles

Hajer Jebali

► To cite this version:

Hajer Jebali. Espace des représentations du groupe d'un nœud dans les groupes de lie résolubles. Mathématiques [math]. Université Blaise Pascal - Clermont-Ferrand II, 2008. Français. NNT : . tel-00485047

HAL Id: tel-00485047

<https://theses.hal.science/tel-00485047>

Submitted on 19 May 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE DE MONASTIR
FACULTE DES SCIENCES DE MONASTIR
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

UNIVERSITE BLAISE PASCAL
U.F.R. Sciences et Technologies

ECOLE DOCTORALE DES SCIENCES FONDAMENTALES
N° : 386

THÈSE

Présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR D'UNIVERSITE

(Spécialité : MATHEMATIQUES)

Par

Hajer JEBALI

Master en Mathématiques

**ESPACE DES REPRESENTATIONS DU GROUPE
D'UN NŒUD DANS LES GROUPES DE LIE
RESOLUBLES**

Soutenue publiquement le 7 octobre 2008, devant la commission d'examen :

Mohamed SELMI
Pierre VOGEL
Said ZARATI
Leila BEN ABDELGHANI
Michael HEUSENER
Dominique MANCHON

Université du Centre
Université Paris 7
Université de Tunis El Manar
Université de Monastir
Université Blaise Pascal
Université Blaise Pascal

Président
Rapporteur
Rapporteur
Directeur de Thèse
Directeur de Thèse
Examineur

Hajer Jebali

ESPACE DES
REPRÉSENTATIONS DU
GROUPE D'UN NŒUD
DANS LES GROUPE DE
LIE RÉSOLUBLES

Hajer Jebali

Faculté des Sciences de Monastir, Boulevard de l'environnement,
5019 Monastir, Tunisie.

E-mail : `hajer.jebali@fsm.rnu.tn`

Classification mathématique par sujets (2000). — 57M25 ; 57M05 ;
57M27 ; 20C15.

Mots clefs. — Théorie des nœuds, représentation métabélienne, module d'Alexander, groupe de Lie résoluble, groupes de cohomologie, variété des représentations.

A la mémoire de mes grands parents

ESPACE DES REPRÉSENTATIONS DU GROUPE D'UN NŒUD DANS LES GROUPES DE LIE RÉSOLUBLES

Hajer Jebali

Résumé. —

Nous nous intéressons à l'étude des représentations du groupe π d'un nœud K de S^3 dans un groupe de Lie résoluble algébrique connexe.

Comme généralisation d'un résultat classique de Burde et de Rham, nous montrons que l'étude de l'existence de certaines représentations métabéliennes permet de retrouver la décomposition complète du module d'Alexander à coefficients complexes.

En second lieu, nous étudions les déformations d'une représentation réductible métabélienne de π dans $SL(3, \mathbb{C})$. Nous montrons que cette représentation est limite de représentations irréductibles non métabéliennes de π dans $SL(3, \mathbb{C})$ et qu'elle est un point lisse de la variété des représentations.

Abstract (Representations space of knot groups into solvable Lie groups)

Let K be a knot in S^3 and π its group. We are interested in the study of the representations space of π into a connected algebraic solvable Lie group.

As particular generalization of Burde and de Rham's result, we prove that the study of the existence of certain metabelian representations enable us to find the decomposition of Alexander module with complex coefficients.

We also study deformations of a reducible metabelian representation from π into $SL(3, \mathbb{C})$. We prove that such a representation is limit of irreducible non metabelian representations from π into $SL(3, \mathbb{C})$ and is a smooth point of the representation variety.

REMERCIEMENTS

Ce travail de recherche est le résultat d'une convention de cotutelle entre la Faculté des Sciences de Monastir et l'Université Blaise Pascal.

Je tiens à remercier très vivement mes directeurs de thèse Leila Bouraoui Ben Abdelghani et Michael Heusener pour leur suivi, leur soutien et leurs conseils judicieux tout au long de cette thèse. Leurs qualités scientifiques et humaines, leur disponibilité, leur enthousiasme, leurs encouragements généreux et leurs remarques précieuses ont largement contribué à l'aboutissement de ce travail. J'espère avoir été à la hauteur de leur confiance. Qu'ils trouvent ici l'expression de ma profonde gratitude.

J'adresse mes plus vifs remerciements à Mohamed Selmi qui m'a encouragée tout au long de ce travail et qui a voulu me faire l'honneur de présider le jury. Je le remercie pour ses précieux conseils et son soutien qui m'ont été toujours d'un très grand secours. Je le remercie également pour m'avoir intégrée à son unité de recherche et aux projets de coopération franco-tunisienne (CMCU), ce qui m'a permis financièrement de mener à bien la préparation de cette thèse.

Je suis ravie que Pierre Vogel et Said Zarati se soient intéressés à mon travail et aient accepté de rapporter dessus. Qu'ils trouvent ici l'expression de toute ma reconnaissance.

Un grand merci va également à Dominique Manchon pour sa gentillesse, ses encouragements et pour avoir bien voulu faire partie du jury.

J'adresse un remerciement particulier à Daniel Lines pour m'avoir mise sur la piste de ce sujet, pour tous les conseils qu'il a su me donner, pour s'être intéressé à ce que je faisais et pour m'avoir souvent encouragée.

Je remercie chaleureusement les membres du Laboratoire de Mathématiques à l'Université Blaise Pascal pour m'avoir toujours très bien accueillie et pour leurs encouragements constants. J'associe à ces remerciements l'ensemble de mes collègues au Département de Mathématiques à la Faculté des Sciences de Monastir pour leur soutien et leur bonne humeur qui ont assuré le bon déroulement de ce travail.

Je souhaite exprimer ma sincère reconnaissance et mon profond respect à tous les professeurs qui m'ont fournis l'assistance nécessaire durant toutes ces années.

Je suis particulièrement reconnaissante à toutes les personnes avec lesquelles j'ai eu des discussions profitables, qui ont su me faire bénéficier de leurs connaissances et compétences et qui m'ont marquée par leur disponibilité et leur gentillesse.

Je souhaite exprimer mes vifs remerciements à mes parents, à mes frères et sœurs pour leur soutien constant et leur patience. Les mots résonnent bien faiblement en comparaison de la reconnaissance que je leur porte. Toute ma gratitude pour avoir enduré mon stress, mes doutes, mes craintes, mes hauts et mes bas avec amour et générosité. Je n'oublie pas les membres de ma famille et mes amis auxquels je dois en grande partie l'accomplissement de ce travail par l'espoir et la confiance qu'ils ont toujours su me donner.

Je réserve un remerciement amical à Monika et à Nassima pour avoir marqué mes séjours en France par leur amitié, leur gentillesse et leur sympathie. Je les remercie infiniment pour leur soutien et leur présence qui m'ont été d'un immense réconfort.

Mes remerciements vont également à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'aboutissement de cette thèse.

"La pensée a des ailes, nul ne peut empêcher son envol"

Ibn Rochd (Averroès)

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	1
1. Généralités et notations	7
1.1. Quelques propriétés des groupes et algèbres de Lie résolubles.....	7
1.2. Groupe du nœud-Module d'Alexander.....	9
1.3. Cohomologie et Produit-cup.....	10
1.4. Espace des représentations.....	13
1.5. Equations d'obstruction.....	16
1.6. Représentations du groupe d'un nœud dans un groupe nilpotent...	19
1.7. Représentations métabéliennes.....	20
2. Module d'Alexander et représentations métabéliennes	25
2.1. Résultat de Burde et de Rham.....	25
2.2. Représentations et produit-cup.....	26
2.3. Décomposition du module d'Alexander.....	32
2.4. Matrice de Seifert et Invariants d'Alexander.....	35
2.5. Exemple du nœud 10_{99}	39
3. Déformations d'une représentation métabélienne du groupe d'un nœud dans $SL(3, \mathbb{C})$	43
3.1. Groupes de cohomologie et variétés des représentations.....	43
3.2. Cas de $SL(3, \mathbb{C})$	48
3.3. Cohomologie des représentations métabéliennes.....	52
3.4. Nature des déformations.....	58
3.5. Produit-cup et 2-cocycles.....	64
Conclusion et perspectives	69
Bibliographie	73

INTRODUCTION

Depuis les travaux de Casson et de Thurston, l'espace des représentations $R(\Gamma, G)$ du groupe fondamental Γ d'une variété de petite dimension dans un groupe de Lie G a été l'outil central de plusieurs théories importantes pour l'étude de ces variétés. A. Casson a introduit en 1985 un invariant des sphères d'homologie entière, qui s'est révélé être extrêmement utile. L'invariant de Casson d'une sphère d'homologie entière M est un entier qui compte algébriquement les classes de conjugaison des représentations du groupe fondamental de M dans $SU(2)$. Grâce à cet invariant, Casson a pu résoudre des problèmes de topologie demeurés jusque là ouverts, comme par exemple l'existence des variétés de dimension 4 non triangulables [Sav99] et [Sav02]. Cet invariant a été généralisé par C. Curtis aux groupes de Lie $SO(3)$, $U(2)$, $Spin(4)$ et $SO(2)$ [Cur94].

Beaucoup de travaux ont suivi l'introduction de cet invariant et ont utilisé d'une façon essentielle l'existence du lien entre la théorie des représentations des groupes fondamentaux des variétés de dimension trois et de la géométrie et la topologie de ces variétés. Nous citons, par exemple, ceux de Culler-Shalen [CS83], Cooper-Gillet-Long [CCG⁺94] et Boyer-Zhang [BZ98] ainsi que les travaux plus récents de Cooper-Hodgson-Kerckhoff [CHK00] et Boileau-Leeb-Porti [BLP05] concernant l'uniformisation des orbifolds.

Le cas qui nous intéresse est celui où Γ est le groupe π d'un nœud K de S^3 . La majorité des résultats obtenus concernent les groupes de Lie $SL(2, \mathbb{C})$ et $SU(2)$. De nombreux travaux ont été effectués dans ce cadre tels que ceux de C. Frohman et E. Klassen [FK91] qui se sont intéressés à l'étude de la

structure locale de l'espace des représentations au voisinage d'une représentation abélienne de π dans $SU(2)$ dans le cas d'une racine simple du polynôme d'Alexander du nœud. Ces résultats ont été généralisés par C. Herald [Her97] et M. Heusener-J. Kroll [HK98] en remplaçant la condition de zéro simple par un saut de signature de la forme hermitienne associée à la forme de Seifert du nœud. M. Heusener, J. Porti et E. Suárez Peirò ont étudié les déformations d'une représentation réductible dans $SL(2, \mathbb{C})$ associée à une racine simple du polynôme d'Alexander [HPSP01]. Un résultat analogue a été établi dans [Sho91] mais n'a malheureusement jamais été publié. On peut également citer les travaux de L. Ben Abdelghani et D. Lines qui ont porté sur les groupes de Lie complexes connexes réductifs et compacts connexes réels ([BA00], [BA98] et [AL02]).

Dans cette thèse, nous considérons d'autres exemples de groupes de Lie, à savoir les groupes de Lie nilpotents et les groupes de Lie résolubles algébriques. Ce choix a été, en partie, motivé par les travaux récents de C. Miller [Mil05]. Ce dernier a développé une classe d'intégrales sur une variété M qui, dans le cas des nœuds fibrés, permet de séparer les éléments du groupe du nœud. Miller utilise d'une façon essentielle les représentations du groupe fondamental de M dans un groupe résoluble.

Il s'avère que le cas des groupes nilpotents est un cas trivial. Plus précisément, nous montrons :

Proposition 1.20

Les représentations du groupe d'un nœud de S^3 dans un groupe nilpotent sont abéliennes.

Ce résultat repose sur une propriété importante des nœuds de S^3 à savoir que la suite centrale descendante du groupe du nœud est stationnaire [Mil54].

Nous considérons ensuite le cas des groupes de Lie résolubles connexes algébriques. Ces derniers peuvent être réalisés comme des sous-groupes du groupe des matrices triangulaires supérieures inversibles d'ordre n , $n \geq 2$. La première étude de telles représentations remonte aux travaux de Burde [Bur67] et de Rham [dR67]. Ils ont étudié les représentations du groupe d'un nœud dans le groupe des isométries du plan. Ils ont montré que l'existence d'une représentation non abélienne de π dans le groupe des matrices triangulaires

supérieures inversibles d'ordre 2 est liée aux racines du polynôme d'Alexander. Cette approche a permis de retrouver des invariants du nœud, une forme simplifiée du polynôme d'Alexander, dans un cadre élémentaire et de détecter les racines de ce polynôme. Seulement, elle ne fournit aucune information sur la multiplicité de ces racines.

Dans le but d'améliorer et de généraliser le résultat de Burde et de Rham, nous nous intéressons à l'étude de certaines représentations métabéliennes du groupe du nœud dans le groupe des matrices triangulaires supérieures inversibles d'ordre n , G_n , pour $n \geq 2$. Cette étude nous permet d'obtenir des informations intéressantes concernant le module d'Alexander à coefficients complexes du nœud, plus précisément, de retrouver la décomposition de ce module et en particulier, la multiplicité des racines du polynôme d'Alexander du nœud.

L'idée repose sur la résolution des équations d'obstruction, dans le deuxième groupe de cohomologie $H^2(\pi, \mathbb{C}_\alpha)$, liées à l'existence de certaines représentations de π dans G_n , $n \geq 2$. Remarquons que \mathbb{C}_α est le corps des nombres complexes \mathbb{C} muni de la structure de π -module via l'action donnée par

$$\gamma \cdot z = \alpha^{|\gamma|} z, \quad \forall \gamma \in \pi \text{ et } \forall z \in \mathbb{C}$$

avec $|\gamma| = p(\gamma)$, où $p: \pi \rightarrow \pi/\pi' \simeq \mathbb{Z}$ désigne la projection canonique. Sous de bonnes hypothèses, nous arrivons à résoudre ces obstructions qui proviennent du produit-cup grâce à la proposition 2.6.

Ceci nous permet d'obtenir une filtration de l'espace des 1-cocycles $Z^1(\pi, \mathbb{C}_\alpha)$. Cette filtration est en lien étroit avec les facteurs qui apparaissent dans la décomposition de la $(t - \alpha)$ -torsion du module d'Alexander à coefficients complexes. Plus précisément, le module d'Alexander à coefficients complexes d'un nœud K de S^3 se décompose sous la forme :

$$H_1(X^\infty, \mathbb{C}) = \bigoplus_{\Delta_K(\beta)=0} \tau_\beta, \text{ avec } \tau_\beta = \bigoplus_{i=1}^{k_\beta} \tau_\beta^i \text{ et } \tau_\beta^i = \frac{\mathbb{C}[t, t^{-1}]}{(t - \beta)^{q_i}}, q_i \in \mathbb{N}^*.$$

Ici Δ_K désigne le polynôme d'Alexander de K . Soient μ un méridien du nœud et α une racine de Δ_K . Nous posons

$$C_n = \{U \in Z^1(\pi, \mathbb{C}_\alpha) \mid \exists (v_2, \dots, v_{n-1}) \in (C^1(\pi, \mathbb{C}_\alpha))^{n-2} \\ \text{tel que } \rho_n^{(U, v_2, \dots, v_{n-1})} \in R(\pi, G_n)\},$$

avec

$$\rho_n^{(U, v_2, \dots, v_{n-1})}(\gamma) = \left(\begin{array}{c|cccc} \alpha^{|\gamma|} & U(\gamma) & v_2(\gamma) & \dots & v_{n-1}(\gamma) \\ 0 & \phi_{n-1}(\gamma) & & & \end{array} \right), \gamma \in \pi$$

où $\phi_{n-1}: \pi \rightarrow G_{n-1}$ est la représentation abélienne définie par

$$\phi_{n-1}(\mu) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Supposons que les puissances q_i , $1 \leq i \leq k_\alpha$, sont données dans un ordre croissant. Nous montrons alors :

Corollaire 2.10

Soit $n \geq 2$, alors :

1. *L'ensemble des 1-cobords $B^1(\pi, \mathbb{C}_\alpha)$ est strictement contenu dans C_n si et seulement s'il existe $1 \leq i \leq k_\alpha$ tel que $q_i \geq n - 1$.*
2. *Dans la filtration de l'espace des 1-cocycles $Z^1(\pi, \mathbb{C}_\alpha)$, on a :*

$$B^1(\pi, \mathbb{C}_\alpha) = C_{q_{k_\alpha}+2} \subsetneq C_{q_{k_\alpha}+1} \subseteq C_{q_{k_\alpha}} \subseteq \dots \subseteq C_2 = Z^1(\pi, \mathbb{C}_\alpha)$$

3. *La codimension du sous-espace C_p dans C_{p-1} est égale au nombre des q_i égaux à $p - 2$ c'est à dire*

$$\dim C_{p-1} - \dim C_p = \text{card}\{1 \leq i \leq k_\alpha \mid q_i = p - 2\}, \forall p \geq 3.$$

Comme application de ce résultat, nous consacrons le chapitre 3 à l'étude de certaines représentations métabéliennes du groupe du nœud dans le groupe des matrices triangulaires supérieures inversibles d'ordre 3. Une telle représentation en induit une de π dans $SL(3, \mathbb{C})$, qu'on notera ρ_0 . Nous nous inspirons alors des travaux de M. Heusener et J. Porti dans [HP05] dans le but de répondre à la question : cette représentation est-elle limite d'un arc de représentations non métabéliennes ?

En se plaçant dans le cas d'une torsion cyclique, nous donnons une réponse partielle à cette question dans le théorème suivant :

Théorème 3.9

Supposons que la $(t - \alpha)$ -torsion du module d'Alexander est cyclique de la forme $\mathbb{C}[t, t^{-1}]/(t - \alpha)^q$. Si α est une racine double du polynôme d'Alexander, i.e. $q = 2$, alors il existe un arc analytique de représentations irréductibles non métabéliennes de π dans $SL(3, \mathbb{C})$ d'extrémité ρ_0 . De plus, la représentation ρ_0 est un point lisse de la variété des représentations $R(\pi, SL(3, \mathbb{C}))$ de dimension locale dix.

L'algèbre de Lie $sl(3, \mathbb{C})$ est munie de la structure de π -module via l'action de la représentation adjointe $\text{Ad} \circ \rho_0$ et elle est notée $sl(3, \mathbb{C})_{\rho_0}$. Pour montrer le résultat précédent, nous sommes amenée à effectuer un calcul cohomologique dans le but de déterminer les dimensions des groupes de cohomologie de l'espace complémentaire du nœud $H^*(X, sl(3, \mathbb{C})_{\rho_0})$. Nous obtenons alors la proposition suivante :

Proposition 3.13 *On a :*

1. $H^0(X, sl(3, \mathbb{C})_{\rho_0}) = 0$.
2. Si $q = 2$, alors $\dim H^1(X, sl(3, \mathbb{C})_{\rho_0}) = \dim H^2(X, sl(3, \mathbb{C})_{\rho_0}) = 2$.
3. Si $q > 2$, alors $\dim H^1(X, sl(3, \mathbb{C})_{\rho_0}) = \dim H^2(X, sl(3, \mathbb{C})_{\rho_0}) \geq 2$.

Nous considérons ensuite la suite exacte longue en cohomologie associée à la paire $(X, \partial X)$ pour montrer que $H^2(X, sl(3, \mathbb{C})_{\rho_0})$ et $H^2(\partial X, sl(3, \mathbb{C})_{\rho_0})$ sont isomorphes. On transporte ainsi le problème sur le bord de l'espace complémentaire X du nœud et on montre que toutes les équations d'obstruction sont nulles en utilisant le fait qu'elles sont nulles sur le bord.

Soit $i: \partial X \rightarrow X$ l'inclusion naturelle du bord de X dans X et soit $i_\#: \pi_1(\partial X) \rightarrow \pi_1(X)$ l'application induite par i sur les groupes fondamentaux de X et ∂X . Alors, nous montrons :

Théorème 3.6

Soit $n \geq 2$ et soit $\rho: \pi \rightarrow SL(n, \mathbb{C})$ une représentation du groupe du nœud π dans $SL(n, \mathbb{C})$. Supposons que $\dim H^0(\partial X, sl(n, \mathbb{C})_\rho) = \dim H^2(X, sl(n, \mathbb{C})_\rho) = n - 1$ et que $H^0(X, sl(n, \mathbb{C})_\rho) = 0$. Si $\rho \circ i_\#$ est un point lisse de $R(\pi_1(\partial X), SL(n, \mathbb{C}))$, alors la représentation ρ est un point lisse de la variété des représentations $R(\pi, SL(n, \mathbb{C}))$.

Ce résultat nous permet de prouver que ρ_0 est un point lisse de la variété des représentations $R(\pi, SL(3, \mathbb{C}))$. Pour montrer l'existence des déformations non métabéliennes de ρ_0 , nous prouvons le théorème suivant :

Théorème 3.26

Il existe un arc analytique de représentations $\rho_t: \pi \rightarrow SL(3, \mathbb{C})$ d'extrémité ρ_0 , tel que l'orbite de ρ_t est fermée et le stabilisateur de ρ_t est fini, pour t suffisamment petit et $t \neq 0$.

Nous concluons ce travail par quelques perspectives et problèmes ouverts.

CHAPITRE 1

GÉNÉRALITÉS ET NOTATIONS

Dans ce chapitre, nous fixons les principales notations utilisées tout au long de cette thèse et nous rappelons les notions et les résultats dont nous aurons besoin pour la suite. Nous commençons par présenter quelques propriétés des groupes de Lie nilpotents et plus généralement des groupes de Lie résolubles. Ensuite, nous rappelons certains résultats sur la théorie des nœuds et l'espace des représentations. Dans le paragraphe 1.5, nous introduisons les équations d'obstruction qui résultent de la condition d'existence d'une représentation du groupe d'un nœud dans un groupe de Lie résoluble connexe algébrique. Les deux derniers paragraphes sont consacrés à montrer que le cas des groupes nilpotents est un cas trivial et à présenter certains résultats liés à l'existence des représentations non métabéliennes.

1.1. Quelques propriétés des groupes et algèbres de Lie résolubles

Dans ce paragraphe, nous regroupons certaines propriétés des groupes et algèbres de Lie résolubles. Les cas qui nous intéressent sont ceux des groupes de Lie nilpotents et des groupes de Lie résolubles connexes algébriques.

Définitions 1.1. — On appelle *suite centrale descendante* d'un groupe G

$$G = \mathcal{C}^0 G \supset \mathcal{C}^1 G \supset \mathcal{C}^2 G \supset \cdots$$

la suite définie par la relation de récurrence

$$\begin{cases} \mathcal{C}^0 G = G \\ \mathcal{C}^{k+1} G = (G, \mathcal{C}^k G) \end{cases}$$

où $(G, \mathcal{C}^k G)$ est le groupe (fermé) engendré par les éléments de la forme $aba^{-1}b^{-1}$, avec $a \in G$ et $b \in \mathcal{C}^k G$.

On dit que G est *nilpotent* s'il existe m tel que $\mathcal{C}^m G = \{e\}$.

Définition 1.2. — [Che46, Chapitre 5, § 3, Définition 1]

Si G est un groupe, on appelle $n^{\text{ième}}$ *groupe dérivé* de G , n étant un entier positif, et on désigne par $\mathcal{D}^n G$, le sous-groupe de G défini inductivement comme suit :

$$\begin{cases} \mathcal{D}^0 G = G \\ \text{pour tout } n \geq 0, \mathcal{D}^{n+1} G \text{ est le groupe des commutateurs de } \mathcal{D}^n G \end{cases}$$

Le groupe $\mathcal{D}^1 G$ est donc le groupe des commutateurs de G , que nous désignerons par G' . Le groupe $\mathcal{D}^2 G$ est noté G'' .

Proposition 1.3. — [Che46, Chapitre 5, § 3, Proposition 1]

Pour tout groupe G , les sous-groupes $\mathcal{D}^n G$ de G sont tous distingués. Les groupes quotients $\mathcal{D}^n G / \mathcal{D}^{n+1} G$ sont abéliens.

Définition 1.4. — [Che46, Chapitre 5, § 3, Définition 2]

Un groupe G est dit *résoluble* s'il existe un entier positif m tel que $\mathcal{D}^m G = \{e\}$.

Définitions 1.5. — Soient \mathbb{K} un corps et f_1, \dots, f_s des polynômes dans $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, alors l'ensemble :

$$\{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n \mid f_i(a_1, \dots, a_n) = 0, \text{ pour tout } 1 \leq i \leq s\}$$

est appelé *variété affine* définie par f_1, \dots, f_s .

On appelle *groupe algébrique (linéaire)* sur \mathbb{K} une variété affine G sur \mathbb{K} munie d'une structure de groupe et telle que l'application $\lambda: G \times G \rightarrow G$ définie par $\lambda(a, b) = ab^{-1}$ est polynomiale.

Proposition 1.6. — [Che46, Chapitre 5, § 3, Proposition 13]

Soit G un groupe algébrique connexe irréductible sur un corps de caractéristique 0. Pour que G soit résoluble, il faut et il suffit que son algèbre de Lie \mathcal{G} soit résoluble. Pour que G soit nilpotent il faut et il suffit que \mathcal{G} soit nilpotente. Ces résultats restent aussi vrais si G est un groupe de Lie connexe.

Théorème 1.7. — (Théorème de Lie-Kolchin)[Ste74, § 2.8, Théorème 1]

Un groupe algébrique résoluble connexe peut être réalisé comme un sous-groupe du groupe des matrices triangulaires supérieures inversibles.

1.2. Groupe du nœud-Module d'Alexander

Ce paragraphe est consacré à un rappel de certains résultats sur la théorie des nœuds qui seront utilisés par la suite. Commençons par rappeler qu'un *nœud* est défini comme étant l'image par un plongement différentiable du cercle S^1 dans la sphère S^3 .

1.2.1. Groupe du nœud. — Soit $V(K)$ un voisinage tubulaire d'un nœud K de S^3 . On note $X = \overline{S^3 \setminus V(K)}$ l'espace complémentaire du nœud. Le groupe fondamental $\pi = \pi_1(X)$ est appelé *groupe du nœud* K .

Une des propriétés les plus importantes du groupe d'un nœud K de S^3 est celle donnée par le théorème suivant de Papakyriakopoulos :

Théorème 1.8 (Asphéricité du nœud). — 1. Pour tout $n \neq 1$, on a $\pi_n(X) = 0$. Autrement dit, l'espace complémentaire X est un espace d'Eilenberg-Mac Lane $K(\pi, 1)$.
2. Le groupe du nœud π est un groupe sans torsion.

On rappelle qu'un *méridien* de K est une courbe simple μ sur $\partial V(K)$ telle que $[\mu] = 0$ dans $\pi_1(V(K))$ et $[\mu] \neq 0$ dans $\pi_1(\partial V(K))$ et qu'une *longitude* l de K est une courbe simple de $\partial V(K)$ qui représente un générateur de $\pi_1(V(K))$ et dont la classe dans le groupe d'homologie de l'espace complémentaire du nœud est triviale. Donc $[\mu]$ et $[l]$ forment une base de $H_1(\partial V(K)) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Le méridien et la longitude sont déterminés à conjugaison près.

1.2.2. Module d'Alexander. — Soient K un nœud de S^3 , $X = \overline{S^3 \setminus V(K)}$, où $V(K)$ est un voisinage tubulaire de K et $\pi := \pi_1(X)$ le groupe fondamental de X . Notons $\pi/\pi' \simeq T = \langle t | - \rangle$ le groupe quotient monogène infini engendré par l'image t du méridien μ et X^∞ le revêtement de X correspondant au groupe des commutateurs $\pi' = [\pi, \pi]$. Posons $\Lambda := \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ l'anneau des polynômes de Laurent à coefficients complexes. Puisque le groupe des automorphismes du revêtement X^∞ , $\text{Aut}(X^\infty) \simeq \pi/\pi' \simeq T$, le revêtement X^∞ est appelé *revêtement cyclique infini* de X . Soit $\xi: X^\infty \rightarrow X^\infty$ un générateur de $\text{Aut}(X^\infty)$. Les groupes d'homologie $H_*(X^\infty, \mathbb{C})$ sont munis d'une structure de Λ -module de la façon suivante. Si $u \in H_i(X^\infty, \mathbb{C})$, on pose

$t \cdot u = \xi_*(u)$, où

$$\begin{aligned} \xi_* : H_i(X^\infty, \mathbb{C}) &\rightarrow H_i(X^\infty, \mathbb{C}) \\ u &\mapsto \xi \circ u \end{aligned}$$

désigne l'isomorphisme d'homologie induit par ξ .

Ces modules sont des modules de torsion et de type fini. Seul le H_1 joue un rôle significatif. En effet, on a :

$$\begin{aligned} H_0(X^\infty, \mathbb{C}) &\simeq \mathbb{C} \\ H_1(X^\infty, \mathbb{C}) &\simeq \pi' / \pi'' \otimes \mathbb{C} \\ H_m(X^\infty, \mathbb{C}) &= 0, \forall m \geq 2 \end{aligned} \quad [\text{BZ03}]$$

Le module $H_1(X^\infty, \mathbb{C})$ est appelé *module d'Alexander à coefficients complexes* du nœud, son idéal d'ordre est principal. Tout générateur de cet idéal est appelé *polynôme d'Alexander* de K et est noté $\Delta_K(t)$. Le polynôme d'Alexander est de degré pair et à coefficients entiers. De plus, il vérifie les propriétés suivantes :

1. $\Delta_K(t) = \pm t^\nu \Delta_K(t^{-1})$; $\nu \in \mathbb{Z}$.
2. $\Delta_K(1) = \pm 1$.

Pour plus de détails voir [Gor78] et [Rol90].

Rappelons que Λ est un anneau principal. Le module d'Alexander à coefficients complexes se décompose sous la forme

$$H_1(X^\infty, \mathbb{C}) = \bigoplus_{\Delta_K(\alpha)=0} \tau_\alpha, \text{ avec } \tau_\alpha = \bigoplus_{i=1}^{k_\alpha} \tau_\alpha^i, \text{ où } \tau_\alpha^i = \frac{\Lambda}{(t - \alpha)^{q_i}},$$

$q_i \in \mathbb{N}^*$.

Remarquons que la multiplicité de α dans le polynôme d'Alexander correspond à la somme $\sum_{i=1}^{k_\alpha} q_i$.

1.3. Cohomologie et Produit-cup

Si Γ est un groupe de présentation finie et M est un Γ -module à gauche, l'espace des n -cochaînes $C^n(\Gamma, M)$ du groupe Γ dans le module M , pour $n \geq 0$, est par définition l'espace des fonctions f de Γ^n dans M . L'opérateur

cobord $\delta: C^n(\Gamma, M) \rightarrow C^{n+1}(\Gamma, M)$ est donné par [Bro94] :

$$\begin{aligned} \delta f(\gamma_1, \dots, \gamma_{n+1}) &= \gamma_1 \cdot f(\gamma_2, \dots, \gamma_{n+1}) + \sum_{i=1}^n (-1)^i f(\gamma_1, \dots, \gamma_{i-1}, \gamma_i \gamma_{i+1}, \dots, \gamma_{n+1}) \\ &\quad + (-1)^{n+1} f(\gamma_1, \dots, \gamma_n). \end{aligned}$$

Remarquons que $C^0(\Gamma, M) \simeq M$ et que, pour $a \in C^0(\Gamma, M)$, on a :

$$\delta a(\gamma) = (\gamma - 1) \cdot a, \quad \forall \gamma \in \Gamma.$$

On note $B^*(\Gamma, M)$ (resp. $Z^*(\Gamma, M)$, $H^*(\Gamma, M)$) l'ensemble des cobords (resp. cocycles, classes de cohomologie) de Γ à coefficients dans M . Si z désigne un cocycle dans $Z^i(\Gamma, M)$, $i \geq 1$, on notera par $\{z\}$ sa classe de cohomologie dans $H^i(\Gamma, M)$.

Définition 1.9. — On définit \mathbb{C}_α comme étant le Λ -module \mathbb{C} dont l'action est donnée par

$$q(t) \cdot z = q(\alpha)z, \quad q(t) \in \Lambda.$$

Le Λ -module \mathbb{C}_1 est simplement noté \mathbb{C} .

Soit π le groupe d'un nœud K de S^3 , alors $\pi \simeq \pi' \rtimes T$. Le Λ -module \mathbb{C}_α admet en plus la structure de π -module via la projection $\pi \twoheadrightarrow T$ et l'action de π est donnée par :

$$\gamma \cdot z = \alpha^{|\gamma|} z, \quad \forall \gamma \in \pi \text{ et } \forall z \in \mathbb{C}$$

avec $|\gamma| = p(\gamma)$, où $p: \pi \rightarrow \pi/\pi' \simeq \mathbb{Z}$ désigne la projection canonique. De plus, on a les propriétés suivantes :

Lemme 1.10. — [BA00, Proposition 2.1]

1. $H^1(\pi, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}$.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{C}^* \setminus \{1\}$. Alors, $H^1(\pi, \mathbb{C}_\alpha) \simeq \text{Hom}_\Lambda(H_1(X^\infty, \mathbb{C}), \mathbb{C}_\alpha)$.
3. Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$. Alors, $H^2(\pi, \mathbb{C}_\alpha) \simeq \text{Ext}_\Lambda^1(H_1(X^\infty, \mathbb{C}), \mathbb{C}_\alpha)$.

Corollaire 1.11. — 1. Soit $\alpha \in \mathbb{C}^* \setminus \{1\}$. Notons j la composée

$$\pi' \rightarrow \pi'/\pi'' \rightarrow \pi'/\pi'' \otimes \mathbb{C}$$

alors l'application

$$\begin{aligned} j^*: \text{Hom}_\Lambda(\pi'/\pi'' \otimes \mathbb{C}, \mathbb{C}_\alpha) &\rightarrow H^1(\pi, \mathbb{C}_\alpha) \\ U &\mapsto \{\overline{U}\}, \text{ avec } \overline{U}(xt^k) = U(j(x)) \end{aligned}$$

est un isomorphisme.

2. Soit α une racine du polynôme d'Alexander du nœud. Supposons que la $(t - \alpha)$ -torsion du module d'Alexander se met sous la forme

$$\tau_\alpha = \frac{\Lambda}{(t - \alpha)^{q_1}} \oplus \cdots \oplus \frac{\Lambda}{(t - \alpha)^{q_{k_\alpha}}}$$

alors $k_\alpha = \dim H^1(\pi, \mathbb{C}_\alpha)$.

3. Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$. Alors, $H^2(\pi, \mathbb{C}_\alpha) = 0$ si et seulement si $\Delta_K(\alpha) \neq 0$.

Remarque 1.12. — Soit $\alpha \in \mathbb{C}^* \setminus \{1\}$ une racine du polynôme d'Alexander du nœud. Si la $(t - \alpha)$ -torsion du module d'Alexander se met sous la forme :

$$\tau_\alpha = \frac{\Lambda}{(t - \alpha)^{q_1}} \oplus \cdots \oplus \frac{\Lambda}{(t - \alpha)^{q_{k_\alpha}}}.$$

Alors, la $(t - \alpha^{-1})$ -torsion est de la forme :

$$\tau_{\alpha^{-1}} = \frac{\Lambda}{(t - \alpha^{-1})^{q_1}} \oplus \cdots \oplus \frac{\Lambda}{(t - \alpha^{-1})^{q_{k_\alpha}}}.$$

En particulier, $\dim H^1(\pi, \mathbb{C}_\alpha) = \dim H^1(\pi, \mathbb{C}_{\alpha^{-1}})$.

Le lemme suivant présente un résultat classique dont on peut trouver une démonstration dans [HP05, Lemme 3.1] :

Lemme 1.13. — Soient π le groupe d'un nœud K de S^3 , M un π -module et X un CW-complexe tel que $\pi_1(X) \simeq \pi$. Alors il existe des homomorphismes naturels $H_i(X, M) \rightarrow H_i(\pi, M)$ qui sont des isomorphismes pour $i = 0, 1$ et surjectif pour $i = 2$. En cohomologie, les homomorphismes $H^i(\pi, M) \rightarrow H^i(X, M)$ sont des isomorphismes pour $i = 0, 1$ et injectif pour $i = 2$.

Remarque 1.14. — Dans le cas où X est le complémentaire du nœud, les homomorphismes $H^*(\pi, M) \rightarrow H^*(X, M)$ et $H^*(\pi_1(\partial X), M) \rightarrow H^*(\partial X, M)$ sont bijectifs. Ceci est conséquence de l'asphéricité de X et de ∂X .

Etant donnés des Γ -modules M_1, M_2 et M_3 , le produit-cup

$$\cup : H^p(\Gamma, M_1) \times H^q(\Gamma, M_2) \rightarrow H^{p+q}(\Gamma, M_1 \otimes M_2)$$

de deux cochaînes $u \in C^p(\Gamma, M_1)$ et $v \in C^q(\Gamma, M_2)$ est la $(p + q)$ -cochaîne $u \cup v \in C^{p+q}(\Gamma, M_1 \otimes M_2)$ définie par :

$$u \cup v(\gamma_1, \dots, \gamma_{p+q}) := u(\gamma_1, \dots, \gamma_p) \otimes \gamma_1 \dots \gamma_p \circ v(\gamma_{p+1}, \dots, \gamma_{p+q}).$$

On a :

$$\delta(u \cup v) = \delta u \cup v + (-1)^p u \cup \delta v.$$

Le produit tensoriel $M_1 \otimes M_2$ est un Γ -module via l'action diagonale. Le produit-cup peut être combiné à une application bilinéaire $M_1 \otimes M_2 \rightarrow M_3$.

1.4. Espace des représentations

Soient Γ un groupe discret de présentation finie et G un groupe algébrique. On appelle *espace des représentations* de Γ dans G l'ensemble $R(\Gamma, G)$ de tous les homomorphismes de groupes de Γ dans G .

L'ensemble $R(\Gamma, G)$ admet une structure de variété affine non nécessairement irréductible [CS83]. En effet, si Γ est le groupe libre F_n de générateurs X_1, \dots, X_n , l'ensemble $R(\Gamma, G)$ s'identifie naturellement à la variété affine G^n . Si Γ admet la présentation $\langle X_1, \dots, X_n | W_1, \dots, W_m \rangle$ on peut plonger $R(\Gamma, G)$ dans G^n via l'application f donnée par $f(\rho) = (\rho(X_1), \dots, \rho(X_n))$. L'application f est injective car les X_i engendrent Γ . Soit $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ un élément de G^n . Si on substitue σ_i à la place de X_i dans le mot W_j alors on peut considérer chaque mot W_j comme étant une application polynomiale de G^n dans G^m . Donc

$$\begin{aligned} \text{Im } f &= \bigcap \{(W_j)^{-1}(e), j = 1, \dots, m\} \\ &= W^{-1}(e, \dots, e) \end{aligned}$$

où $W = (W_1, \dots, W_m): G^n \rightarrow G^m$ et on peut identifier $R(\Gamma, G)$ à $\text{Im } f$. Cette structure est indépendante de la présentation de Γ [LM85].

1.4.1. Espace tangent de Zariski. — Soit V une sous-variété affine de \mathbb{C}^n dont l'idéal de définition est $I(V)$. Soit p un point de V , l'espace tangent de Zariski à V en p , noté $T_p^{\text{Zar}}(V)$, donné par

$$\left\{ \left. \frac{d\gamma(t)}{dt} \right|_{t=0} \in \mathbb{C}^n \mid \gamma \in (\mathbb{C}[t])^n, \gamma(0) = p \text{ et } f \circ \gamma \in t^2\mathbb{C}[t] \text{ pour tout } f \in I(V) \right\}$$

est l'espace vectoriel des dérivées des germes polynomiaux $\gamma(t)$ définis au voisinage de l'origine, à valeurs dans \mathbb{C}^n tels que $\gamma(0) = p$ et qui satisfont les équations de $I(V)$ modulo t^2 .

En général, $\dim(T_p^{\text{Zar}}(V)) \geq \dim V$ et on a égalité si et seulement si le point p n'est pas singulier. Les espaces tangents de Zariski au sens algébrique et au sens analytique sont isomorphes et un point est non singulier au sens algébrique si et seulement s'il est lisse au sens analytique. Pour plus de détails, voir [Rei88].

1.4.2. Espace tangent et groupe de cohomologie. — Soient π le groupe d'un nœud K de S^3 , G un groupe de Lie algébrique connexe d'algèbre de Lie \mathcal{G} et $\rho: \pi \rightarrow G$ une représentation de π dans G . L'algèbre de Lie \mathcal{G} peut être munie de la structure de π -module via l'action de la représentation adjointe

$$\begin{aligned}\pi \times \mathcal{G} &\rightarrow \mathcal{G} \\ (\gamma, x) &\mapsto \text{Ad} \circ \rho(\gamma)(x)\end{aligned}$$

et elle sera notée \mathcal{G}_ρ . D'après un résultat d'André Weil [Wei64], l'espace tangent de Zariski $T_\rho^{\text{Zar}} R(\pi, G)$ s'identifie à un sous-espace de l'espace des 1-cocycles $Z^1(\pi, \mathcal{G}_\rho)$. Etant donné un arc de représentations ρ_ϵ tel que $\rho_0 = \rho$, un cocycle $d: \pi \rightarrow \mathcal{G}_\rho$ est défini par :

$$d(\gamma) := \left. \frac{d\rho_\epsilon(\gamma)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \rho(\gamma)^{-1}, \quad \forall \gamma \in \pi.$$

En général, cette inclusion est stricte. L'espace tangent de Zariski en $\rho \in R(\pi, G)$ à l'orbite de ρ , sous l'action de la représentation adjointe, s'identifie à l'ensemble des cobords $B^1(\pi, G)$. Ici, $b: \pi \rightarrow \mathcal{G}_\rho$ est un cobord s'il existe $x \in \mathcal{G}$ tel que

$$b(\gamma) = \text{Ad} \circ \rho(\gamma)(x) - x.$$

Définition 1.15. — [Sha77, Chapitre 2, § 1.4] La dimension locale de $R(\pi, G)$ en ρ , notée $\dim_\rho R(\pi, G)$, est définie comme étant la dimension maximale des composantes irréductibles de $R(\pi, G)$ contenant ρ .

Le lemme suivant présente un résultat classique dont on peut trouver une démonstration dans [HP05] :

Lemme 1.16. — Soit ρ une représentation dans $R(\pi, G)$. Si $\dim_\rho R(\pi, G) = \dim Z^1(\pi, \mathcal{G}_\rho)$, alors ρ est un point lisse de la variété des représentations $R(\pi, G)$. De plus, ρ est contenue dans une composante unique de dimension $\dim Z^1(\pi, \mathcal{G}_\rho)$.

Lemme 1.17. — Soient $n \geq 2$ et $\eta: \Gamma \rightarrow \mathbb{C}^*$ un homomorphisme de groupes. Si $H^2(\Gamma, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = 0$, alors il existe $\tilde{\eta}: \Gamma \rightarrow \mathbb{C}^*$ un homomorphisme vérifiant $(\tilde{\eta}(\gamma))^n = \eta(\gamma)$, pour tout $\gamma \in \Gamma$.

Démonstration. — Soit $\lambda: \Gamma \rightarrow \mathbb{C}^*$ une application vérifiant $(\lambda(\gamma))^n = \eta(\gamma)$, pour tout $\gamma \in \Gamma$. Alors il existe une application $\omega: \Gamma \times \Gamma \rightarrow \mathbb{C}^*$ telle que

$$\lambda(\gamma_1 \gamma_2) = \lambda(\gamma_1) \lambda(\gamma_2) \omega(\gamma_1, \gamma_2), \quad \forall \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma.$$

En utilisant le fait que $(\lambda(\gamma))^n = \eta(\gamma)$, nous pouvons vérifier que $(\omega(\gamma_1, \gamma_2))^n = 1$, pour tous $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ et que ω prend ainsi ses valeurs dans

$$U_n = \{\xi \in \mathbb{C}^* \mid \xi^n = 1\} \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

En écrivant que, pour tous $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \Gamma$:

$$\lambda((\gamma_1\gamma_2)\gamma_3) = \lambda(\gamma_1(\gamma_2\gamma_3))$$

on obtient :

$$\lambda(\gamma_1)\lambda(\gamma_2)(\omega(\gamma_1, \gamma_2))\lambda(\gamma_3)\omega(\gamma_1\gamma_2, \gamma_3) = \lambda(\gamma_1)\lambda(\gamma_2)\lambda(\gamma_3)\omega(\gamma_2, \gamma_3)\omega(\gamma_1, \gamma_2\gamma_3)$$

et

$$\omega(\gamma_2, \gamma_3)(\omega(\gamma_1\gamma_2, \gamma_3))^{-1}\omega(\gamma_1, \gamma_2\gamma_3)(\omega(\gamma_1, \gamma_2))^{-1} = 1.$$

Ceci implique que ω est un 2-cocycle dans $Z^2(\Gamma, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.

Puisque $H^2(\Gamma, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = 0$, il existe une 1-cochaîne $d: \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ telle que $\omega = \delta d$. Donc

$$\omega(\gamma_1, \gamma_2) = \delta d(\gamma_1, \gamma_2) = d(\gamma_2)(d(\gamma_1\gamma_2))^{-1}d(\gamma_1)$$

et

$$\begin{aligned} \lambda d(\gamma_1\gamma_2) &= \lambda(\gamma_1\gamma_2)d(\gamma_1\gamma_2) \\ &= \lambda(\gamma_1)d(\gamma_1)\lambda(\gamma_2)d(\gamma_2). \end{aligned}$$

Ainsi, λd est un homomorphisme et nous pouvons prendre $\tilde{\eta} = \lambda d$. □

Nous notons G_n le groupe des matrices triangulaires supérieures inversibles d'ordre n . Le lemme précédent nous permet d'obtenir des représentations d'un groupe Γ dans $SL(n, \mathbb{C})$ à partir des représentations de Γ dans G_n . Plus précisément,

Corollaire 1.18. — Soit $n \geq 2$ et soit Γ un groupe tel que $H^2(\Gamma, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = 0$. Si

$$\begin{aligned} \rho: \Gamma &\rightarrow G_n \\ \gamma &\mapsto \begin{pmatrix} \alpha(\gamma) & x_{12}(\gamma) & x_{13}(\gamma) & \dots & x_{1n}(\gamma) \\ 0 & 1 & x_{23}(\gamma) & \dots & x_{2n}(\gamma) \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & x_{n-1,n}(\gamma) \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

est un homomorphisme de groupes, alors ρ induit une représentation

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}: \Gamma &\rightarrow SL(n, \mathbb{C}) \\ \gamma &\mapsto \alpha^{-1/n}(\gamma)\rho(\gamma).\end{aligned}$$

Ici $\alpha^{-1/n}: \Gamma \rightarrow \mathbb{C}^*$ est un homomorphisme tel que

$$(\alpha^{-1/n}(\gamma))^n = \alpha^{-1}(\gamma) \quad , \quad \forall \gamma \in \Gamma.$$

Lemme 1.19. — Soit π le groupe d'un nœud K de S^3 , alors $H^2(\pi, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = 0$.

Démonstration. — Rappelons que X désigne l'espace complémentaire du nœud et remarquons que $H^k(X, M) = 0$, pour tout module M et pour tout $k \geq 3$ [BZ03, Chapitre 3]. La suite exacte longue en homologie associée à la paire $(X, \partial X)$ donne :

$$H_1(X, \partial X, \mathbb{Z}) \rightarrow H_0(\partial X, \mathbb{Z}) \rightarrow H_0(X, \mathbb{Z}) \rightarrow 0.$$

Or $H_0(\partial X, \mathbb{Z}) \simeq H_0(X, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ [BZ03, Chapitre 3], donc $H_1(X, \partial X, \mathbb{Z}) = 0$. Il s'en suit, par dualité de Poincaré, que $H^2(X, \mathbb{Z}) = 0$. Considérons maintenant la suite exacte courte

$$0 \rightarrow n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow 0$$

qui induit en cohomologie

$$H^2(X, n\mathbb{Z}) \rightarrow H^2(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \rightarrow 0.$$

Comme $H^2(X, \mathbb{Z}) = 0$, $H^2(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = 0$, et d'après le lemme 1.13, $H^2(\pi, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = 0$. \square

1.5. Equations d'obstruction

La condition d'existence d'une représentation du groupe d'un nœud dans un groupe de Lie résoluble connexe algébrique se traduit par un système d'équations d'obstruction que nous présenterons dans ce paragraphe.

Soit $n \geq 2$ et soit la flèche $\rho: \pi \rightarrow G_n$ définie par

$$\rho(\gamma) = \begin{pmatrix} \alpha_1(\gamma) & \alpha_2(\gamma)x_{12}(\gamma) & \alpha_3(\gamma)x_{13}(\gamma) & \dots & \dots & \dots & \alpha_n(\gamma)x_{1n}(\gamma) \\ 0 & \alpha_2(\gamma) & \alpha_3(\gamma)x_{23}(\gamma) & \dots & \dots & \dots & \alpha_n(\gamma)x_{2n}(\gamma) \\ & & \alpha_3(\gamma) & \dots & \dots & \dots & \alpha_n(\gamma)x_{3n}(\gamma) \\ \vdots & & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \alpha_{n-1}(\gamma) & \alpha_n(\gamma)x_{n-1,n}(\gamma) \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \alpha_n(\gamma) \end{pmatrix}$$

Ce qui revient à écrire

$$\rho(\gamma) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(\gamma) E_{ii} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \alpha_j(\gamma) x_{ij}(\gamma) E_{ij}$$

où $(E_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ est la base canonique de l'algèbre des matrices carrées d'ordre n .

Pour que ρ soit une représentation il faut et il suffit qu'elle vérifie la condition

$$\rho(\gamma\gamma') = \rho(\gamma)\rho(\gamma'); \quad \forall \gamma, \gamma' \in \pi$$

c'est à dire

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \alpha_i(\gamma\gamma') E_{ii} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \alpha_j(\gamma\gamma') x_{ij}(\gamma\gamma') E_{ij} &= \sum_{i=1}^n \alpha_i(\gamma) \alpha_i(\gamma') E_{ii} \\ &+ \sum_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_i(\gamma) \alpha_j(\gamma') x_{ij}(\gamma') + \alpha_j(\gamma) \alpha_i(\gamma') x_{ij}(\gamma)) E_{ij} \\ &+ \sum_{1 \leq i < j < l \leq n} \alpha_j(\gamma) \alpha_l(\gamma') x_{ij}(\gamma) x_{jl}(\gamma') E_{il}. \end{aligned}$$

Par identification, nous obtenons le système suivant

$$\begin{cases} \alpha_i(\gamma\gamma') = \alpha_i(\gamma)\alpha_i(\gamma'), \forall 1 \leq i \leq n \\ \alpha_j(\gamma\gamma')x_{ij}(\gamma\gamma') - \alpha_i(\gamma)\alpha_j(\gamma')x_{ij}(\gamma') - \alpha_j(\gamma)\alpha_j(\gamma')x_{ij}(\gamma) \\ = \sum_{l=i+1}^{j-1} \alpha_l(\gamma)\alpha_j(\gamma')x_{il}(\gamma)x_{lj}(\gamma'), \forall 1 \leq i < j \leq n \end{cases}$$

que nous pouvons aussi écrire sous la forme

$$\begin{cases} \alpha_i(\gamma\gamma') = \alpha_i(\gamma)\alpha_i(\gamma'), \forall 1 \leq i \leq n \\ x_{ij}(\gamma\gamma') - \frac{\alpha_i(\gamma)}{\alpha_j(\gamma)}x_{ij}(\gamma') - x_{ij}(\gamma) = \sum_{l=i+1}^{j-1} \frac{\alpha_l(\gamma)}{\alpha_j(\gamma)}x_{il}(\gamma)x_{lj}(\gamma'), \forall 1 \leq i < j \leq n \end{cases}$$

En particulier, nous obtenons

$$(1.1) \quad x_{i,i+1}(\gamma\gamma') - \frac{\alpha_i(\gamma)}{\alpha_{i+1}(\gamma)}x_{i,i+1}(\gamma') - x_{i,i+1}(\gamma) = 0, \forall 1 \leq i \leq n-1$$

ce qui donne $x_{i,i+1} \in Z^1(\pi, \mathbb{C}_{\frac{\alpha_i}{\alpha_{i+1}}})$, pour tout $1 \leq i \leq n-1$ et

$$(1.2) \quad x_{ij}(\gamma\gamma') - \frac{\alpha_i(\gamma)}{\alpha_j(\gamma)}x_{ij}(\gamma') - x_{ij}(\gamma) = \sum_{l=i+1}^{j-1} \frac{\alpha_l(\gamma)}{\alpha_j(\gamma)}x_{il}(\gamma)x_{lj}(\gamma'), \forall 1 \leq i < j \leq n$$

autrement dit,

$$(1.3) \quad \delta x_{ij}(\gamma, \gamma') + \sum_{l=i+1}^{j-1} x_{il} \cup x_{lj}(\gamma, \gamma') = 0, \forall 1 \leq i < j \leq n.$$

Remarquons que pour tout $1 \leq i \leq n$, α_i est un homomorphisme abélien du groupe du nœud dans \mathbb{C}^* , donc il est complètement déterminé par l'image du méridien et $\alpha_i(\gamma) = \alpha_i^{|\gamma|}$, avec $|\gamma| = p(\gamma)$, où $p: \pi \rightarrow \pi/\pi' \simeq \mathbb{Z}$ désigne l'homomorphisme d'abélianisation. Donc nous identifierons l'homomorphisme abélien α_i avec la valeur qu'il prend au méridien.

1.6. Représentations du groupe d'un nœud dans un groupe nilpotent

L'objet de ce paragraphe est de prouver que le cas des groupes nilpotents est un cas trivial. Autrement dit, nous montrons :

Proposition 1.20. — *Les représentations du groupe d'un nœud de S^3 dans un groupe nilpotent sont abéliennes.*

La démonstration est basée sur une propriété du groupe du nœud donnée par le lemme suivant, qui est un résultat classique de Milnor :

Lemme 1.21. — [Mil54]

Soit π le groupe d'un nœud K de S^3 , alors pour tout $k \geq 2$ on a

$$\mathcal{C}^k \pi = \mathcal{C}^1 \pi = \pi', \quad \forall k \geq 2.$$

Démonstration du lemme 1.21. — Comme $\pi \simeq \pi' \rtimes T$, tout élément $a \in \pi$ peut s'écrire sous la forme $a = b\mu^i$, où μ est un méridien du nœud, $b \in \mathcal{C}^1 \pi$ et $i \in \mathbb{Z}$.

Soient $a_1, a_2 \in \pi$, alors : $a_1 = b_1\mu^{i_1}$ et $a_2 = b_2\mu^{i_2}$, avec $i_1, i_2 \in \mathbb{Z}$ et $b_1, b_2 \in \mathcal{C}^1 \pi$.

D'où :

$$\begin{aligned} a_1 a_2 &= b_1 \mu^{i_1} b_2 \mu^{i_2} \\ &= b_1 \gamma_1 b_2 \mu^{i_1} \mu^{i_2} & , \quad \gamma_1 \in \mathcal{C}^2 \pi \\ &= \gamma_2 \gamma_1 b_2 b_1 \mu^{i_1} \mu^{i_2} & , \quad \gamma_2 \in \mathcal{C}^2 \pi \\ &= \gamma_2 \gamma_1 \gamma_3 \mu^{i_2} b_2 b_1 \mu^{i_1} & , \quad \gamma_3 \in \mathcal{C}^2 \pi \\ &= \gamma_2 \gamma_1 \gamma_3 \gamma_4 b_2 \mu^{i_2} b_1 \mu^{i_1} & , \quad \gamma_4 \in \mathcal{C}^2 \pi \\ &= \gamma a_2 a_1 & , \quad \gamma \in \mathcal{C}^2 \pi \end{aligned}$$

Ainsi $\pi/\mathcal{C}^2 \pi$ est commutatif et $\mathcal{C}^1 \pi \subset \mathcal{C}^2 \pi$. Or $\mathcal{C}^2 \pi \subset \mathcal{C}^1 \pi$ donc $\mathcal{C}^1 \pi = \mathcal{C}^2 \pi$, par suite, $\mathcal{C}^1 \pi = \mathcal{C}^k \pi$, $\forall k \geq 2$. \square

Démonstration de la proposition 1.20. — Soit $\rho: \pi \rightarrow N$ une représentation du groupe du nœud dans N , où N désigne un groupe nilpotent d'ordre m , alors $\rho|_{\mathcal{C}^m \pi}: \mathcal{C}^m \pi \rightarrow \mathcal{C}^m N$ est un homomorphisme de groupes.

Or, $\mathcal{C}^m N = \{e\}$ et $\mathcal{C}^m \pi = \mathcal{C}^1 \pi$, donc $\rho|_{\mathcal{C}^1 \pi}: \mathcal{C}^1 \pi \rightarrow \{e\}$ est un homomorphisme de groupes et ρ est abélienne. \square

Exemple 1.22. — Considérons $\phi_m: \pi \rightarrow N_m$ l'homomorphisme abélien défini par

$$\phi_m(\gamma) = \begin{pmatrix} h_0(\gamma) & h_1(\gamma) & h_2(\gamma) & \dots & h_{m-1}(\gamma) \\ 0 & h_0(\gamma) & h_1(\gamma) & \dots & h_{m-2}(\gamma) \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & h_0(\gamma) & h_1(\gamma) \\ 0 & \dots & \dots & 0 & h_0(\gamma) \end{pmatrix}$$

et

$$\phi_m(\mu) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_m + \mathcal{N}_m$$

où I_m désigne la matrice identité. Alors, pour tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$(1.4) \quad \phi_m(\mu^k) = (I_m + \mathcal{N}_m)^k = \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} \mathcal{N}_m^p = \sum_{p=0}^k h_p(\mu^k) \mathcal{N}_m^p$$

où les $h_p: \pi \rightarrow \mathbb{C}$ sont des solutions des équations d'obstruction décrites dans le paragraphe 1.5, données par $h_p(\mu^k) = \binom{k}{p}$ et où $\binom{k}{p}$, $p \in \mathbb{N}$ désigne le coefficient binomial défini par

$$\binom{k}{0} := 1 \text{ et } \binom{k}{p} := \frac{k(k-1)\dots(k-p+1)}{p!} \in \mathbb{Z}.$$

1.7. Représentations métabéliennes

Définition 1.23. — Soient $k \geq 1$ et G un groupe. Une représentation $\rho: \pi \rightarrow G$ est dite k -métabélienne si la restriction de ρ au $k^{\text{ième}}$ groupe dérivé de π , noté $\mathcal{D}^k \pi$, est triviale. Une représentation 2-métabélienne est simplement dite représentation métabélienne. Une représentation 1-métabélienne est une représentation abélienne.

Une représentation abélienne, étant complètement déterminée par la donnée de l'image du méridien, l'étude d'une telle représentation fournit peu d'informations sur le nœud. Par contre, le cas des représentations métabéliennes présente un domaine d'étude qui a intéressé plusieurs auteurs dont on peut

citer [Har79], [Fri04] et récemment [BF] et [HKL]. Les représentations non 3-métabéliennes ont été utilisées pour définir un invariant du nœud à partir de son système périphérique [BZ03, Chapitre 14].

Rappelons que $H_1(X^\infty, \mathbb{Z}) = 0$ si et seulement si $\Delta_K(t) = 1$. Nous montrons alors le résultat suivant :

Théorème 1.24. — *Soit π le groupe d'un nœud K de S^3 dont le polynôme d'Alexander est non trivial ($\Delta_K(t) \neq 1$). Alors il existe une représentation non métabélienne de π à valeurs dans G_n , pour tout $n \geq 3$.*

Démonstration. — Soit α une racine du polynôme d'Alexander de K . Considérons

$$\rho: \pi \rightarrow G_n$$

$$\gamma \mapsto \begin{pmatrix} \alpha^{|\gamma|} & x_{12}(\gamma) & 0 & \dots & 0 & \alpha^{|\gamma|}x_{1n}(\gamma) \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \alpha^{|\gamma|}x_{2n}(\gamma) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & & 0 & \alpha^{|\gamma|} \end{pmatrix}$$

avec $|\gamma| = p(\gamma)$, où $p: \pi \rightarrow \pi/\pi' \simeq \mathbb{Z}$ désigne la projection canonique.

D'après la paragraphe 1.5, une condition nécessaire et suffisante pour que ρ soit un homomorphisme de groupes est donnée par le système suivant :

$$\begin{cases} x_{12} \in Z^1(\pi, \mathbb{C}_\alpha) \\ x_{2n} \in Z^1(\pi, \mathbb{C}_{\alpha^{-1}}) \\ -\delta x_{1n} = x_{12} \cup x_{2n} \end{cases}$$

Puisque α est racine du polynôme d'Alexander du nœud, il existe x_{12} (resp. x_{2n}) un cocycle dans $Z^1(\pi, \mathbb{C}_\alpha)$ (resp. dans $Z^1(\pi, \mathbb{C}_{\alpha^{-1}})$) qui n'est pas un cobord (voir paragraphe 1.3). Les cocycles étant métabéliens, il suffit de vérifier que la restriction de x_{1n} au deuxième sous-groupe des commutateurs est non

triviale. Soient $\gamma_1, \gamma_2 \in \pi'$, alors :

$$\begin{aligned}
x_{1n}(\gamma_1\gamma_2\gamma_1^{-1}\gamma_2^{-1}) &= x_{1n}(\gamma_1\gamma_2) + x_{1n}(\gamma_1^{-1}\gamma_2^{-1}) + x_{12}(\gamma_1\gamma_2)x_{2n}(\gamma_1^{-1}\gamma_2^{-1}) \\
&= x_{1n}(\gamma_1) + x_{1n}(\gamma_2) + x_{12}(\gamma_1)x_{2n}(\gamma_2) - x_{1n}(\gamma_2\gamma_1) \\
&\quad + x_{12}(\gamma_2\gamma_1)x_{2n}(\gamma_2\gamma_1) + (x_{12}(\gamma_1) + x_{12}(\gamma_2))(-x_{2n}(\gamma_1) - x_{2n}(\gamma_2)) \\
&= x_{12}(\gamma_1)x_{2n}(\gamma_2) - x_{12}(\gamma_2)x_{2n}(\gamma_1).
\end{aligned}$$

Modulo une correction par un cobord, nous pouvons supposer que $x_{12}(\mu) = x_{2n}(\mu) = 0$. Par exemple, si $x_{12}(\mu) = c \in \mathbb{C}^*$, nous remplaçons x_{12} par la cochaîne $x_{12} + \delta d$, où $d = \frac{c}{(1-\alpha)}$. Soient ξ et β dans π tels que $x_{12}(\xi) \neq 0$ et $x_{2n}(\beta) \neq 0$. Deux cas sont possibles :

– 1^{er} cas : Si $x_{12}(\beta) = 0$ ou $x_{2n}(\xi) = 0$, nous considérons $\gamma_1 = \mu\beta\mu^{-1}\beta^{-1}$ et $\gamma_2 = \mu\xi\mu^{-1}\xi^{-1}$. Alors :

$$\begin{aligned}
x_{1n}(\gamma_1\gamma_2\gamma_1^{-1}\gamma_2^{-1}) &= x_{12}(\mu\beta\mu^{-1}\beta^{-1})x_{2n}(\mu\xi\mu^{-1}\xi^{-1}) - x_{12}(\mu\xi\mu^{-1}\xi^{-1})x_{2n}(\mu\beta\mu^{-1}\beta^{-1}) \\
&= (\mu - 1) \cdot x_{12}(\beta)(\mu - 1) \cdot x_{2n}(\xi) - (\mu - 1) \cdot x_{12}(\xi)(\mu - 1) \cdot x_{2n}(\beta) \\
&= -(\mu - 1) \cdot x_{12}(\xi)(\mu - 1) \cdot x_{2n}(\beta) \\
&\neq 0.
\end{aligned}$$

– 2^{ème} cas : Si $x_{12}(\beta) \neq 0$ et $x_{2n}(\xi) \neq 0$, nous posons $\gamma_1 = \mu\xi\mu^{-1}\xi^{-1}$ et $\gamma_2 = \mu^{-1}\xi\mu\xi^{-1}$. Alors :

$$\begin{aligned}
x_{1n}(\gamma_1\gamma_2\gamma_1^{-1}\gamma_2^{-1}) &= x_{12}(\mu\xi\mu^{-1}\xi^{-1})x_{2n}(\mu^{-1}\xi\mu\xi^{-1}) \\
&\quad - x_{12}(\mu^{-1}\xi\mu\xi^{-1})x_{2n}(\mu\xi\mu^{-1}\xi^{-1}) \\
&= (\mu - 1) \cdot x_{12}(\xi)(\mu^{-1} - 1) \cdot x_{2n}(\xi) \\
&\quad - (\mu^{-1} - 1) \cdot x_{12}(\xi)(\mu - 1) \cdot x_{2n}(\xi) \\
&= ((\alpha - 1)(\alpha - 1) - (\alpha^{-1} - 1)(\alpha^{-1} - 1))x_{12}(\xi)x_{2n}(\xi) \\
&= \alpha^{-2}(\alpha^2 - 1)(\alpha - 1)^2x_{12}(\xi)x_{2n}(\xi) \\
&\neq 0.
\end{aligned}$$

□

Théorème 1.25. — Soient $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \mathbb{C}^*$.

Supposons que $\Delta_K(\frac{\omega_1}{\omega_2}) = \Delta_K(\frac{\omega_2}{\omega_3}) = 0$ et que $\Delta_K(\frac{\omega_1}{\omega_3}) \neq 0$. Alors il existe une représentation non métabélienne $\rho: \pi \rightarrow G_3$ donnée par

$$\rho(\gamma) = \begin{pmatrix} \omega_1^{|\gamma|} & \omega_2^{|\gamma|} x_{12}(\gamma) & \omega_3^{|\gamma|} x_{13}(\gamma) \\ 0 & \omega_2^{|\gamma|} & \omega_3^{|\gamma|} x_{23}(\gamma) \\ 0 & 0 & \omega_3^{|\gamma|} \end{pmatrix}$$

si et seulement si $(\frac{\omega_1}{\omega_2} \neq \frac{\omega_2}{\omega_3} \text{ ou } (\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\omega_2}{\omega_3} \text{ et } \dim H^1(\pi, \mathbb{C}_{\frac{\omega_1}{\omega_2}}) \geq 2))$.

Démonstration. — Soit l'application $\rho: \pi \rightarrow G_3$ définie par

$$\rho(\gamma) = \begin{pmatrix} \omega_1^{|\gamma|} & \omega_2^{|\gamma|} x_{12}(\gamma) & \omega_3^{|\gamma|} x_{13}(\gamma) \\ 0 & \omega_2^{|\gamma|} & \omega_3^{|\gamma|} x_{23}(\gamma) \\ 0 & 0 & \omega_3^{|\gamma|} \end{pmatrix}$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que ρ soit une représentation est

$$\text{donnée par le système suivant : } \begin{cases} x_{12} \in Z^1(\pi, \mathbb{C}_{\frac{\omega_1}{\omega_2}}) \\ x_{23} \in Z^1(\pi, \mathbb{C}_{\frac{\omega_2}{\omega_3}}) \\ \delta x_{13} + x_{12} \cup x_{23} = 0 \text{ dans } H^2(\pi, \mathbb{C}_{\frac{\omega_1}{\omega_3}}) \end{cases}$$

Ce système est vérifié puisque $\frac{\omega_1}{\omega_3}$ n'est pas racine du polynôme d'Alexander et $H^2(\pi, \mathbb{C}_{\frac{\omega_1}{\omega_3}}) = 0$. Donc une telle représentation ρ existe, il suffit de voir sous quelles conditions cette représentation est non métabélienne.

Supposons que $\frac{\omega_1}{\omega_2} \neq \frac{\omega_2}{\omega_3}$. Puisque $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ et $\frac{\omega_2}{\omega_3}$ sont deux racines du polynôme d'Alexander, nous pouvons choisir x_{12} et x_{23} deux cocycles qui ne sont pas des cobords. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $x_{12}(\mu) = x_{23}(\mu) = 0$.

Pour $\gamma_1, \gamma_2 \in \pi'$, on a :

$$x_{13}(\gamma_1 \gamma_2 \gamma_1^{-1} \gamma_2^{-1}) = x_{12}(\gamma_1) x_{23}(\gamma_2) - x_{12}(\gamma_2) x_{23}(\gamma_1).$$

Soient $\alpha, \beta \in \pi$ tels que $x_{12}(\alpha) \neq 0$ et $x_{23}(\beta) \neq 0$. Deux cas se présentent :

– 1^{er} cas : Si $x_{12}(\beta) = 0$ ou $x_{23}(\alpha) = 0$, alors pour $\gamma_1 = \mu \beta \mu^{-1} \beta^{-1}$ et $\gamma_2 = \mu \alpha \mu^{-1} \alpha^{-1}$, on a :

$$\begin{aligned} x_{13}(\gamma_1 \gamma_2 \gamma_1^{-1} \gamma_2^{-1}) &= -(\mu - 1) \cdot x_{12}(\alpha) (\mu - 1) \cdot x_{23}(\beta) \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

- 2ème cas : Si $x_{12}(\beta) \neq 0$ et $x_{23}(\alpha) \neq 0$, alors pour $\gamma_1 = \mu\alpha\mu^{-1}\alpha^{-1}$ et $\gamma_2 = \mu^{-1}\alpha\mu\alpha^{-1}$, on a :

$$\begin{aligned}
x_{13}(\gamma_1\gamma_2\gamma_1^{-1}\gamma_2^{-1}) &= (\mu - 1) \cdot x_{12}(\alpha)(\mu^{-1} - 1) \cdot x_{23}(\alpha) \\
&\quad - (\mu^{-1} - 1) \cdot x_{12}(\alpha)(\mu - 1) \cdot x_{23}(\alpha) \\
&= \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} - 1\right)x_{12}(\alpha)\left(\frac{\omega_3}{\omega_2} - 1\right)x_{23}(\alpha) \\
&\quad - \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} - 1\right)x_{12}(\alpha)\left(\frac{\omega_2}{\omega_3} - 1\right)x_{23}(\alpha) \\
&= x_{12}(\alpha)x_{23}(\alpha)\left(\frac{\omega_2}{\omega_1} - 1\right)\left(\frac{\omega_2}{\omega_3} - 1\right)\left(\frac{\omega_1\omega_3}{\omega_2^2} - 1\right) \\
&\neq 0.
\end{aligned}$$

Supposons maintenant que $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\omega_2}{\omega_3}$. Deux cas se présentent :

- 1ère cas : Si (x_{12}, x_{23}) est libre, alors ils existent $\lambda, \xi \in \pi$ tels que

$$\begin{vmatrix} x_{12}(\lambda) & x_{23}(\lambda) \\ x_{12}(\xi) & x_{23}(\xi) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Pour $\gamma_1 = \mu\xi\mu^{-1}\xi^{-1}$ et $\gamma_2 = \mu\lambda\mu^{-1}\lambda^{-1}$, on a :

$$\begin{aligned}
x_{13}(\gamma_1\gamma_2\gamma_1^{-1}\gamma_2^{-1}) &= (\mu - 1) \cdot x_{12}(\xi)(\mu - 1) \cdot x_{23}(\lambda) - (\mu - 1) \cdot x_{12}(\lambda)(\mu - 1) \cdot x_{23}(\xi) \\
&= \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} - 1\right)^2(x_{12}(\xi)x_{23}(\lambda) - x_{12}(\lambda)x_{23}(\xi)) \\
&\neq 0.
\end{aligned}$$

- 2ème cas : Si (x_{12}, x_{23}) est liée, alors il existe $a \in \mathbb{C}^*$ tel que $x_{23}(\gamma) = ax_{12}(\gamma)$, pour tout $\gamma \in \pi$.

D'où

$$\begin{aligned}
x_{13}(\gamma_1\gamma_2\gamma_1^{-1}\gamma_2^{-1}) &= x_{12}(\gamma_1)x_{23}(\gamma_2) - x_{12}(\gamma_2)x_{23}(\gamma_1) \\
&= x_{12}(\gamma_1)ax_{12}(\gamma_2) - x_{12}(\gamma_2)ax_{12}(\gamma_1) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

CHAPITRE 2

MODULE D'ALEXANDER ET REPRÉSENTATIONS MÉTABÉLIENNES

Le but de ce chapitre est d'améliorer et de généraliser un résultat classique de Burde et de Rham. Pour ce faire, nous nous intéressons à l'étude de l'existence de certaines représentations du groupe du nœud dans le groupe des matrices triangulaires supérieures inversibles d'ordre n , $n \geq 2$.

Ce chapitre est organisé comme suit : dans le premier paragraphe, nous présentons le résultat de Burde et de Rham. Nous introduisons les sous-espaces vectoriels C_n de l'espace des 1-cocycles $Z^1(\pi, \mathbb{C}_\alpha)$ dans le second paragraphe. Le lien entre les sous-espaces C_n et les différents facteurs dans la décomposition du module d'Alexander à coefficients complexes est expliqué dans le paragraphe 2.3. Dans le paragraphe 2.4, nous rappelons la définition de la matrice de Seifert. Le fait de présenter le polynôme et le module d'Alexander à l'aide de la matrice de Seifert nous sera utile lors de l'étude d'exemples. Le paragraphe 2.5 est consacré à l'étude de l'exemple du nœud 10_9 . Ce dernier est le premier exemple, dans le tableau de la classification des nœuds, dont la torsion n'est ni cyclique ni semi-simple.

2.1. Résultat de Burde et de Rham

Soit α un nombre complexe non nul. Rappelons que G_n désigne le groupe des matrices triangulaires supérieures inversibles d'ordre n , $n \geq 2$. Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à l'étude des représentations $\rho_n: \pi \rightarrow G_n$

du groupe d'un nœud K de S^3 à valeurs dans G_n , $n \geq 2$, qui sont de la forme

$$\rho_n(\gamma) = \begin{pmatrix} \alpha^{|\gamma|} & x_{12}(\gamma) & x_{13}(\gamma) & \dots & x_{1n}(\gamma) \\ 0 & 1 & x_{23}(\gamma) & \dots & x_{2n}(\gamma) \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & x_{n-1,n}(\gamma) \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarquons que, dans le cas où $\alpha = 1$, il s'agit des représentations du groupe d'un nœud dans un groupe de Lie nilpotent (voir paragraphe 1.6). Burde et de Rham se sont intéressés au cas $n = 2$. Plus précisément, ils ont, séparément, montré le résultat suivant :

Théorème 2.1. — [Bur67] et [dR67]

Il existe des représentations non abéliennes du groupe du nœud dans G_2 si et seulement si α est racine du polynôme d'Alexander.

Ce résultat se généralise pour $n \geq 2$ et nous allons démontrer dans le paragraphe 2.2 le théorème suivant :

Théorème 2.2. — *Soit $n \geq 2$. Il existe des représentations non abéliennes du groupe du nœud dans G_n de la forme décrite précédemment si et seulement si α est racine du polynôme d'Alexander du nœud.*

Lemme 2.3. — *Toutes les représentations ρ_n décrites précédemment sont métabéliennes.*

Démonstration. — Commençons par remarquer que la représentation obtenue à partir de ρ_n , en supprimant la première ligne et la première colonne, prend ses valeurs dans un groupe nilpotent. Pour tout $\gamma \in \pi'$, $\rho_n(\gamma)$ est une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix}$$

où I_{n-1} est la matrice identité (voir paragraphe 1.6) et deux matrices de cette forme commutent. Donc ρ_n est métabélienne. \square

2.2. Représentations et produit-cup

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^*$, les Λ -modules \mathbb{C}_α et \mathbb{C}_β admettent en plus la structure de π -modules et l'action de π est donnée par :

$$\gamma \cdot z = \alpha^{|\gamma|} z, \quad \forall \gamma \in \pi \text{ et } \forall z \in \mathbb{C}$$

avec $|\gamma| = p(\gamma)$, où $p: \pi \rightarrow \pi/\pi' \simeq \mathbb{Z}$ désigne la projection canonique.

Si $f \in C^1(\pi, \mathbb{C}_\alpha)$ et $g \in C^1(\pi, \mathbb{C}_\beta)$ désignent deux cochaînes à valeurs dans les π -modules \mathbb{C}_α et \mathbb{C}_β , alors on notera $f \cup g \in C^2(\pi, \mathbb{C}_{\alpha\beta})$ leur produit cup donné par :

$$f \cup g(\gamma_1, \gamma_2) = f(\gamma_1)\beta^{|\gamma_1|}g(\gamma_2) \quad , \quad \forall \gamma_1, \gamma_2 \in \pi .$$

Pour $n \geq 2$, soit ρ_n^V l'application qui à γ associe la matrice

$$\rho_n^V(\gamma) = \left(\begin{array}{c|c} \alpha^{|\gamma|} & V(\gamma) \\ \hline 0 & \phi_{n-1}(\gamma) \end{array} \right)$$

où $V = (v_1, \dots, v_{n-1}) \in (C^1(\pi, \mathbb{C}_\alpha))^{n-1}$ et ϕ_{n-1} est la représentation abélienne décrite dans l'exemple 1.22.

Nous posons également

$$C_n = \{U \in Z^1(\pi, \mathbb{C}_\alpha) \mid \exists (v_2, \dots, v_{n-1}) \in (C^1(\pi, \mathbb{C}_\alpha))^{n-2} \\ \text{tel que } \rho_n^{(U, v_2, \dots, v_{n-1})} \in \text{Hom}(\pi, G_n)\} .$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que ρ_n^V soit un homomorphisme de groupes se traduit par $\rho_n^V(\gamma_1\gamma_2) = \rho_n^V(\gamma_1)\rho_n^V(\gamma_2)$, pour tous $\gamma_1, \gamma_2 \in \pi$, et est équivalente à

$$(2.1) \quad V(\gamma_1\gamma_2) = \alpha^{|\gamma_1|}V(\gamma_2) + V(\gamma_1)\phi_{n-1}(\gamma_2); \quad \forall \gamma_1, \gamma_2 \in \pi .$$

Cette condition est aussi équivalente au système suivant :

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} v_1(\gamma_1\gamma_2) = \alpha^{|\gamma_1|}v_1(\gamma_2) + v_1(\gamma_1)h_0(\gamma_2) \\ v_2(\gamma_1\gamma_2) = \alpha^{|\gamma_1|}v_2(\gamma_2) + v_1(\gamma_1)h_1(\gamma_2) + v_2(\gamma_1)h_0(\gamma_2) \\ v_3(\gamma_1\gamma_2) = \alpha^{|\gamma_1|}v_3(\gamma_2) + v_1(\gamma_1)h_2(\gamma_2) + v_2(\gamma_1)h_1(\gamma_2) + v_3(\gamma_1)h_0(\gamma_2) \\ \vdots \\ v_{n-1}(\gamma_1\gamma_2) = \alpha^{|\gamma_1|}v_{n-1}(\gamma_2) + \sum_{p=1}^{n-1} v_p(\gamma_1)h_{n-1-p}(\gamma_2) \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} v_1(\gamma_1\gamma_2) = v_1(\gamma_1) + \alpha^{|\gamma_1|}v_1(\gamma_2) \\ v_2(\gamma_1\gamma_2) = v_2(\gamma_1) + \alpha^{|\gamma_1|}v_2(\gamma_2) + v_1(\gamma_1)h_1(\gamma_2) \\ v_3(\gamma_1\gamma_2) = v_3(\gamma_1) + \alpha^{|\gamma_1|}v_3(\gamma_2) + v_1(\gamma_1)h_2(\gamma_2) + v_2(\gamma_1)h_1(\gamma_2) \\ \vdots \\ v_{n-1}(\gamma_1\gamma_2) = v_{n-1}(\gamma_1) + \alpha^{|\gamma_1|}v_{n-1}(\gamma_2) + \sum_{p=1}^{n-2} v_p(\gamma_1)h_{n-1-p}(\gamma_2) \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 \in Z^1(\pi, \mathbb{C}_\alpha) \\ -\delta v_i = \sum_{p=1}^{i-1} v_p \cup h_{i-p} \quad , \forall 2 \leq i \leq n-1 \end{cases}
\end{aligned}$$

(voir aussi [FS87]).

En conclusion, nous cherchons un $(n-1)$ -uplet $V = (v_1, \dots, v_{n-1}) \in (C^1(\pi, \mathbb{C}_\alpha))^{n-1}$ vérifiant

$$(2.2) \quad \delta v_i + \sum_{p=1}^{i-1} v_p \cup h_{i-p} = 0, \text{ pour } i = 1, \dots, n-1.$$

Lemme 2.4. — *L'ensemble C_n est un sous-espace vectoriel de $Z^1(\pi, \mathbb{C}_\alpha)$ qui contient l'ensemble des 1-cobords $B^1(\pi, \mathbb{C}_\alpha)$.*

Démonstration. — Soit $b_0 \in C^0(\pi, \mathbb{C}_\alpha)$ tel que $v_1 = \delta b_0$, alors les cochaînes $v_i = -b_0 \cup h_{i-1}$, pour $2 \leq i \leq n-1$, sont des solutions de (2.2). En effet, pour

tout $2 \leq i \leq n-1$,

$$\begin{aligned}
\delta v_i &= -\delta b_0 \cup h_{i-1} - b_0 \cup \delta h_{i-1} \\
&= -v_1 \cup h_{i-1} + b_0 \cup \left(\sum_{p=1}^{i-2} h_p \cup h_{i-1-p} \right) \\
&= -v_1 \cup h_{i-1} + \sum_{p=1}^{i-2} b_0 \cup h_p \cup h_{i-1-p} \\
&= -v_1 \cup h_{i-1} - \sum_{p=1}^{i-2} v_{p+1} \cup h_{i-1-p} \\
&= - \sum_{p=1}^{i-1} v_p \cup h_{i-p}.
\end{aligned}$$

Donc l'ensemble des 1-cobords $B^1(\pi, \mathbb{C}_\alpha)$ est inclus dans C_n .

Soient U_1 et U_2 deux éléments de C_n et a un nombre complexe. On a :

$$U_1 \in C_n \Rightarrow \exists (v_2, \dots, v_{n-1}) \in (C^1(\pi, \mathbb{C}_\alpha))^{n-2} | \rho_n^{(U_1, v_2, \dots, v_{n-1})} \in \text{Hom}(\pi, GL(n, \mathbb{C}))$$

et

$$U_2 \in C_n \Rightarrow \exists (v'_2, \dots, v'_{n-1}) \in (C^1(\pi, \mathbb{C}_\alpha))^{n-2} | \rho_n^{(U_2, v'_2, \dots, v'_{n-1})} \in \text{Hom}(\pi, GL(n, \mathbb{C}))$$

En utilisant la relation (2.1), nous pouvons facilement vérifier que

$$\rho_n^{(U_1 + aU_2, v_2 + av'_2, \dots, v_{n-1} + av'_{n-1})} \in \text{Hom}(\pi, GL(n, \mathbb{C})).$$

En effet,

$$\begin{aligned}
(V_1 + aV_2)(\gamma_1 \gamma_2) &= V_1(\gamma_1 \gamma_2) + aV_2(\gamma_1 \gamma_2) \\
&= \alpha^{|\gamma_1|} V_1(\gamma_2) + V_1(\gamma_1) \phi_{n-1}(\gamma_2) + a\alpha^{|\gamma_1|} V_2(\gamma_2) + aV_2(\gamma_1) \phi_{n-1}(\gamma_2) \\
&= \alpha^{|\gamma_1|} (V_1(\gamma_2) + aV_2(\gamma_2)) + (V_1(\gamma_1) + aV_2(\gamma_1)) \phi_{n-1}(\gamma_2).
\end{aligned}$$

Par suite, $U_1 + aU_2$ appartient à C_n .

□

Lemme 2.5. — Si $V = (v_1, \dots, v_{n-1})$ est solution de (2.2), alors il existe $V' = (v'_1, \dots, v'_{n-1})$ solution de (2.2) telle que $\{v_1\} = \{v'_1\}$ et $v'_i(\mu) = 0$, pour tout $1 \leq i \leq n-1$.

Démonstration. — Rappelons que s'il existe $b_0 \in C^0(\pi, \mathbb{C}_\alpha) = \mathbb{C}_\alpha$ tel que $v_1 = \delta b_0$ alors $v_i = -b_0 \cup h_{i-1}$, $2 \leq i \leq n-1$, donne une famille de 1-cochaînes vérifiant (2.2). Plus généralement, si $v_1 = v_2 = \dots = v_{k-1} = 0$ et

si $v_k = \delta b_0$, alors $v_{k+i} = -b_0 \cup h_i$, pour $1 \leq i \leq n-1-k$, donne une telle famille.

Maintenant, soit $V = (v_1, \dots, v_{n-1})$ une solution de (2.2). Posons $b_1 = \frac{v_1(\mu)}{1-\alpha}$, alors $(v_1 + \delta b_1)(\mu) = 0$. D'après ce qui précède, il existe $V'_1 = (\delta b_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1})$ solution de (2.2). Il est facile de vérifier, d'après (2.1), que $V_1 + V'_1$ est aussi solution de (2.2). Plus généralement, posons $b_k = \frac{v_k(\mu)}{1-\alpha}$, alors il existe $V'_k = (0, \dots, 0, \delta b_k, \omega'_{k+1}, \dots, \omega'_{n-1})$ solution de (2.2). De plus, on peut aisément vérifier que $V + V'_k$ est solution de (2.2). \square

Comme $H^2(\pi, \mathbb{C}_\alpha) = 0$ si et seulement si $\Delta_K(\alpha) \neq 0$ [BA00, Proposition 2.1], un vecteur V de l'espace vectoriel $(C^1(\pi, \mathbb{C}_\alpha))^{n-1}$ solution de (2.2) existe lorsque α n'est pas racine du polynôme d'Alexander du nœud. Dans le cas où α est racine du polynôme d'Alexander, nous utiliserons le résultat suivant pour la résolution des équations d'obstruction (2.2).

Proposition 2.6. — *Soit $n \geq 2$ et soit $\alpha \in \mathbb{C}^* \setminus \{1\}$ une racine du polynôme d'Alexander du nœud.*

Alors, il existe un uplet $V = (v_1, \dots, v_{n-1})$ vérifiant (2.2) si et seulement s'il existe une famille d'homomorphismes de groupes

$$\varphi_i: \pi'/\pi'' \rightarrow (\mathbb{C}, +), \quad 1 \leq i \leq n-1$$

vérifiant

$$(2.3) \quad \varphi_i(\mu^k y \mu^{-k}) = \alpha^k \sum_{p=1}^i \binom{-k}{i-p} \varphi_p(y), \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Démonstration. — Commençons par remarquer que l'équation (2.3) peut se mettre sous la forme matricielle

$$(2.4) \quad \Phi(\mu^k y \mu^{-k}) = \alpha^k \Phi(y) J_{n-1}^{-k}, \quad \forall y \in \pi'/\pi'' \text{ et } \forall k \in \mathbb{Z}$$

où Φ désigne le vecteur ligne $(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}): \pi'/\pi'' \rightarrow \mathbb{C}^{n-1}$ et $J_{n-1} := \phi_{n-1}(\mu)$ désigne la matrice introduite dans l'exemple 1.22.

Supposons que V existe. D'après le lemme 2.5, nous pouvons supposer que $v_i(\mu) = 0$, pour tout $1 \leq i \leq n-1$. Chacune des cochaînes v_i (resp. h_i) est métabélienne donc elle passe au quotient par π'' et définit ainsi une 1-cochaîne de π'/π'' à valeurs dans \mathbb{C}_α (resp. \mathbb{C}). Considérons, pour $1 \leq i \leq n-1$, les

applications $\varphi_i = v_i|_{\pi'/\pi''}$. Comme V vérifie (2.1), pour tout $\gamma \in \pi'$ et tout $k \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\begin{aligned} V(\mu^k \gamma \mu^{-k}) &= \alpha^k V(\mu^{-k}) + V(\mu^k \gamma) \phi_{n-1}(\mu^{-k}) \\ &= (\alpha^k V(\gamma) + V(\mu^k) \phi_{n-1}(\gamma)) \phi_{n-1}(\mu^{-k}) \\ &= \alpha^k V(\gamma) \phi_{n-1}(\mu^{-k}). \end{aligned}$$

D'où

$$\Phi(\mu^k [\gamma] \mu^{-k}) = \alpha^k \Phi([\gamma]) \phi_{n-1}(\mu^{-k}),$$

où $[\gamma]$ désigne la classe de γ dans π'/π'' .

Réciproquement, supposons qu'il existe une famille d'homomorphismes de groupes $\varphi_i: \pi'/\pi'' \rightarrow \mathbb{C}$, $1 \leq i \leq n-1$, telles que $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})$ vérifie (2.4) et posons

$$V(\gamma t^k) = \Phi([\gamma]) J_{n-1}^k, \quad \forall \gamma \in \pi' \text{ et } \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Alors, pour tous $(\gamma_1 t^{k_1}), (\gamma_2 t^{k_2}) \in \pi' \rtimes T$, on a :

$$\begin{aligned} V((\gamma_1 t^{k_1})(\gamma_2 t^{k_2})) &= V((\gamma_1 + t^{k_1} \gamma_2) t^{k_1+k_2}) \\ &= \Phi([\gamma_1 + t^{k_1} \gamma_2]) \phi_{n-1}(\mu^{k_1+k_2}) \\ &= (\Phi([\gamma_1]) + \Phi(t^{k_1} [\gamma_2])) \phi_{n-1}(\mu^{k_1+k_2}) \\ &= \Phi([\gamma_1]) \phi_{n-1}(\mu^{k_1+k_2}) + \Phi(t^{k_1} [\gamma_2]) \phi_{n-1}(\mu^{k_1+k_2}) \\ &= \Phi([\gamma_1]) \phi_{n-1}(\mu^{k_1+k_2}) + \alpha^{k_1} \Phi([\gamma_2]) \phi_{n-1}(\mu^{k_2}) \\ &= V(\gamma_1 t^{k_1}) \phi_{n-1}(\mu^{k_2}) + \alpha^{k_1} V(\gamma_2 t^{k_2}). \end{aligned}$$

Ainsi V vérifie (2.1). □

Démonstration du théorème 2.2. — Supposons que α n'est pas racine du polynôme d'Alexander du nœud et considérons $\rho_n: \pi \rightarrow G_n$ un homomorphisme de groupes en posant $\rho_n = (x_{ij})_{1 \leq i \leq j \leq n}$.

Dans ce cas, x_{12} est un cobord car $Z^1(\pi, \mathbb{C}_\alpha) = B^1(\pi, \mathbb{C}_\alpha)$. Donc $x_{12}|_{\pi'} \equiv 0$ et d'après la construction des applications \mathbb{C} -linéaires φ_i de la proposition 2.6, $1 \leq i \leq n-1$, on a $\varphi_1 \equiv 0$. Ce qui implique que $\varphi_2 \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}[t, t^{-1}]}(\pi'/\pi'', \mathbb{C}_\alpha) \simeq H^1(\pi, \mathbb{C}_\alpha) = \{0\}$. Par itération, nous obtenons $\varphi_i \equiv 0$, pour tout $1 \leq i \leq n-1$. Par suite $x_{1j}|_{\pi'} \equiv 0$, pour tout $2 \leq j \leq n$ et ρ_n est abélienne.

Réciproquement, si α est racine du polynôme d'Alexander, il suffit de considérer, pour $n \geq 2$, l'homomorphisme $\rho_n: \pi \rightarrow G_n$ donné par

$$\rho_n(\gamma) = \begin{pmatrix} \alpha^{|\gamma|} & 0 & \dots & 0 & x_{1n}(\gamma) \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \end{pmatrix}$$

où x_{1n} est un cocycle dans $Z^1(\pi, \mathbb{C}_\alpha)$ qui n'est pas un cobord. □

2.3. Décomposition du module d'Alexander

Dans ce paragraphe, nous cherchons à retrouver la décomposition du module d'Alexander à coefficients complexes du nœud et ce en examinant les sous-espaces vectoriels C_n . Commençons par présenter quelques résultats concernant le module d'Alexander.

D'après [Gor78], le premier groupe d'homologie $H_1(X^\infty, \mathbb{C})$ est un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie, qui est isomorphe à $\pi'/\pi'' \otimes \mathbb{C}$ [BZ03]. Ce dernier peut être muni de la structure de Λ -module via l'action

$$t \cdot (y \otimes z) = (\mu y \mu^{-1}) \otimes z, \quad \forall y \in \pi'/\pi'' \text{ et } \forall z \in \mathbb{C}.$$

Rappelons que le module d'Alexander à coefficients complexes d'un nœud K de S^3 se décompose sous la forme

$$H_1(X^\infty, \mathbb{C}) = \bigoplus_{\Delta_K(\beta)=0} \tau_\beta, \text{ avec } \tau_\beta = \bigoplus_{i=1}^{k_\beta} \tau_\beta^i, \text{ et } \tau_\beta^i = \frac{\Lambda}{(t - \beta)^{q_i}}, q_i \in \mathbb{N}^*.$$

Soit α une racine du polynôme d'Alexander du nœud. Puisque $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\pi'/\pi'' \otimes \mathbb{C}, \mathbb{C}_\alpha) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\pi'/\pi'', \mathbb{C}_\alpha)$, les applications φ_i décrites dans la proposition 2.6 définissent, par extension des scalaires, des applications \mathbb{C} -linéaires $\varphi_i: \pi'/\pi'' \otimes \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}_\alpha$ vérifiant (2.3). Dans les deux lemmes suivants, nous établissons un lien entre l'existence des applications φ_i et les puissances q_i .

Lemme 2.7. — *Soit $n \geq 2$.*

Soit $\varphi_i: \pi'/\pi'' \otimes \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}_\alpha$, $1 \leq i \leq n-1$, une famille d'applications \mathbb{C} -linéaires vérifiant (2.3) et soit $\tau = \frac{\Lambda}{(t - \alpha)^q}$.

Si $q \leq n-2$, alors $\varphi_1|_\tau \equiv 0$.

Démonstration. — Notons $\Phi := (\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})$, alors Φ vérifie (2.4). Pour tout $y \in \pi'/\pi'' \otimes \mathbb{C}$,

$$\Phi((t - \alpha) \cdot y) = \alpha \Phi(y)(J_{n-1}^{-1} - I_{n-1})$$

et pour tout $y \in \tau$,

$$0 = \Phi((t - \alpha)^q \cdot y) = \alpha^q \Phi(y)(J_{n-1}^{-1} - I_{n-1})^q.$$

Supposons que $q < n-1$, alors la $(q+1)$ -ième composante de $\alpha^q \Phi(y)(J_{n-1}^{-1} - I_{n-1})^q$ est donnée par $(-\alpha)^q \varphi_1(y)$. D'où le résultat. \square

Lemme 2.8. — Soit $q \in \mathbb{N}^*$ et soit $\tau = \frac{\Lambda}{(t - \alpha)^q}$, alors, pour tout $2 \leq n \leq q+1$, il existe une famille d'applications \mathbb{C} -linéaires $\varphi_i: \tau \rightarrow \mathbb{C}_\alpha$, $1 \leq i \leq n-1$, vérifiant (2.3), avec $\varphi_1 \neq 0$.

Démonstration. — Il suffit de montrer qu'il existe un vecteur ligne $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}): \tau \rightarrow \mathbb{C}^{n-1}$ qui vérifie (2.4).

Soit n un entier tel que $2 \leq n \leq q+1$ et soit $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}): \tau \rightarrow \mathbb{C}^{n-1}$ donnée par :

$$\begin{cases} \Phi(e_0) = (1, 0, \dots, 0) \\ \Phi(e_j) = \alpha^j \Phi(e_0)(J_{n-1}^{-1} - I_{n-1})^j, \quad \forall 1 \leq j \leq q-1 \end{cases}$$

et prolongée par \mathbb{C} -linéarité sur τ , où $\{e_j = [(t - \alpha)^j]; j = 0, \dots, q-1\}$ désigne une \mathbb{C} -base de τ .

Remarquons que Φ est bien définie puisque $q \geq n-1$ et pour tout $y \in \tau$,

$$\Phi((t - \alpha)^q \cdot y) = \alpha^q \Phi(y)(J_{n-1}^{-1} - I_{n-1})^q = 0.$$

Maintenant, soit $0 \leq j \leq q-2$, alors

$$\begin{aligned} \Phi(t \cdot e_j) &= \Phi(e_{j+1} + \alpha e_j) \\ &= \alpha^{j+1} \Phi(e_0)(J_{n-1}^{-1} - I_{n-1})^j J_{n-1}^{-1} \\ &= \alpha \Phi(e_j) J_{n-1}^{-1} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \Phi(t \cdot e_{q-1}) &= \alpha \Phi(e_{q-1}) \\ &= \alpha^q \Phi(e_0)(J_{n-1}^{-1} - I_{n-1})^{q-1} \\ &= \alpha^q \Phi(e_0)(J_{n-1}^{-1} - I_{n-1})^{q-1} J_{n-1}^{-1} \\ &= \alpha \Phi(e_{q-1}) J_{n-1}^{-1}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\Phi(t \cdot e_j) = \alpha \Phi(e_j) J_{n-1}^{-1}, \quad \forall 0 \leq j \leq q-1$$

et

$$\Phi(t^k \cdot y) = \alpha^k \Phi(y) J_{n-1}^{-k}, \quad \forall y \in \tau \text{ et } \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Donc Φ vérifie (2.4). □

Nous avons vu, dans le corollaire 1.11, qu'il y a une correspondance entre les Λ -homomorphismes de $H_1(X^\infty, \mathbb{C})$ à valeurs dans \mathbb{C}_α et le premier groupe de cohomologie $H^1(\pi, \mathbb{C}_\alpha)$. Plus précisément,

$$\begin{aligned} H^1(\pi, \mathbb{C}_\alpha) &\simeq \text{Hom}_\Lambda(H_1(X^\infty, \mathbb{C}), \mathbb{C}_\alpha) \\ &\simeq \text{Hom}_\Lambda(\tau_\alpha, \mathbb{C}_\alpha) \\ &\simeq \bigoplus_{i=1}^{k_\alpha} \text{Hom}_\Lambda(\tau_\alpha^i, \mathbb{C}_\alpha) \end{aligned}$$

Donc une base de $H^1(\pi, \mathbb{C}_\alpha)$ est donnée par $B = (\{U_1\}, \dots, \{U_{k_\alpha}\})$, où $U_i: H_1(X^\infty, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}_\alpha$, $1 \leq i \leq k_\alpha$ est un générateur de $\text{Hom}_\Lambda(\tau_\alpha^i, \mathbb{C}_\alpha)$. Par abus de notation, nous confondrons $\{U_i\}$ avec le Λ -homomorphisme correspondant. Nous avons alors le résultat suivant :

Théorème 2.9. — Soit $n \geq 2$, alors :

$$C_n = B^1(\pi, \mathbb{C}_\alpha) \oplus \text{Vect}\{U_i \mid q_i \geq n-1\}$$

En particulier, $\dim_{\mathbb{C}} C_n = 1 + \text{card}\{1 \leq i \leq k_\alpha \mid q_i \geq n-1\}$.

Démonstration. — Soit U un cocycle de π dans \mathbb{C}_α appartenant à C_n , alors il existe un homomorphisme de groupes $\rho_n^{(U, v_2, \dots, v_{n-1})}$ de π dans G_n tel que

$$\rho_n^{(U, v_2, \dots, v_{n-1})}(\gamma) = \left(\begin{array}{c|ccc} \alpha^{|\gamma|} & U(\gamma) & v_2(\gamma) & \dots & v_{n-1}(\gamma) \\ 0 & \phi_{n-1}(\gamma) & & & \end{array} \right), \quad \gamma \in \pi$$

D'après la proposition 2.6, l'existence des cochaînes v_j , $2 \leq j \leq n-1$, est équivalente à l'existence des applications \mathbb{C} -linéaires $\varphi_j: \pi'/\pi'' \otimes \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}_\alpha$ telles que

$$\Phi(\mu^k y \mu^{-k}) = (\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})(\mu^k y \mu^{-k}) = \alpha^k \Phi(y) \phi_{n-1}(\mu^{-k}), \quad \forall k \in \mathbb{Z} \text{ et } \varphi_1 = \{U\}.$$

D'autre part, il existe $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq k_\alpha} \in \mathbb{C}^{k_\alpha}$ tel que $\{U\} = \sum_{i=1}^{k_\alpha} \lambda_i \{U_i\}$.

Soit $1 \leq i_0 \leq k_\alpha$ tel que $q_{i_0} < n-1$, alors d'après le lemme 2.7, on a :

$$\{U\}(y) = 0, \quad \forall y \in \tau_\alpha^{i_0}.$$

C'est à dire $\lambda_{i_0}\{U_{i_0}\}(y) = 0, \forall y \in \tau_\alpha^{i_0}$ car $\{U_i\}|_{\tau_\alpha^j} \equiv 0, \forall i \neq j$.

D'où $\lambda_{i_0} = 0$.

Réciproquement, soit $i \in \{1, \dots, k_\alpha\}$ tel que $q_i \geq n - 1$. D'après la proposition 2.6, pour montrer que $U_i \in C_n$, il suffit de montrer que, pour tout $2 \leq j \leq n - 1$, il existe une application \mathbb{C} -linéaire $\varphi_j: \pi'/\pi'' \otimes \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}_\alpha$ telle que

$$\begin{aligned} \Phi(\mu^k y \mu^{-k}) &= (\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})(\mu^k y \mu^{-k}) \\ &= \alpha^k \Phi(y) \phi_{n-1}(\mu^{-k}), \forall k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

et $\varphi_1 = \{U_i\}$.

Or l'existence de telles applications est assurée par le lemme 2.8. □

Supposons que les puissances q_i sont ordonnées de sorte que

$$1 \leq q_1 \leq \dots \leq q_{k_\alpha},$$

alors :

Corollaire 2.10. — *Soit $n \geq 2$, alors :*

1. *L'ensemble des 1-cobords $B^1(\pi, \mathbb{C}_\alpha)$ est strictement contenu dans C_n si et seulement s'il existe $1 \leq i \leq k_\alpha$ tel que $q_i \geq n - 1$.*
2. *Dans la filtration de l'espace des 1-cocycles $Z^1(\pi, \mathbb{C}_\alpha)$, on a :*

$$B^1(\pi, \mathbb{C}_\alpha) = C_{q_{k_\alpha}+2} \subsetneq C_{q_{k_\alpha}+1} \subseteq C_{q_{k_\alpha}} \subseteq \dots \subseteq C_2 = Z^1(\pi, \mathbb{C}_\alpha)$$

3. *La codimension du sous-espace C_p dans C_{p-1} est égale au nombre des q_i égaux à $p - 2$ c'est à dire*

$$\dim C_{p-1} - \dim C_p = \text{card}\{1 \leq i \leq k_\alpha \mid q_i = p - 2\}, \forall p \geq 3.$$

2.4. Matrice de Seifert et Invariants d'Alexander

Pour appliquer les résultats du théorème 2.9 et du corollaire 2.10 aux exemples concrets de nœuds, nous aurons besoin d'exprimer le polynôme d'Alexander et de présenter le module d'Alexander en fonction de la matrice de Seifert du nœud (voir proposition 2.16).

2.4.1. Projection régulière d'un nœud. — Pour représenter un nœud K , on le projette sur un plan. On met ensuite en place une convention de dessin pour reconnaître dans chaque croisement la position relative des brins. On peut attribuer à un nœud un sens de parcours. Ce sens de parcours sera alors signifié par une flèche. Un nœud muni d'un sens de parcours sera appelé *un nœud orienté*. On appelle *projection du nœud* ou *diagramme du nœud*, une projection régulière du nœud sur un plan munie de l'orientation induite par celle du nœud. Un nœud est dit *en position régulière* s'il vérifie les conditions suivantes :

- si un point est multiple, il est le croisement d'au plus deux droites,
- il existe un nombre au plus fini de points multiples,
- aucun point double n'est l'image d'un sommet de K .

Un nœud possède plusieurs projections régulières. Deux *diagrammes* sont dits *équivalents* si l'un est obtenu à partir de l'autre par une suite finie des mouvements de Reidemeister [BZ03, Chapitre 1, § C].

Proposition 2.11. — [BZ03, Proposition 1.14]

Deux nœuds sont équivalents si et seulement si leurs diagrammes sont équivalents.

2.4.2. Surface de Seifert. — Nous commençons par énoncer le résultat suivant dû à L. Pontrjagin et F. Frankl :

Théorème 2.12. — [BZ03, Proposition 2.4] ou [Mur08, Théorème 5.1.1]

Chaque nœud orienté borde une surface connexe orientable dans \mathbb{R}^3 .

Définition 2.13. — Soit K un nœud orienté. Une surface connexe, orientable F de bord K est appelée *surface de Seifert* de K . L'orientation de F est naturellement induite par celle du nœud K .

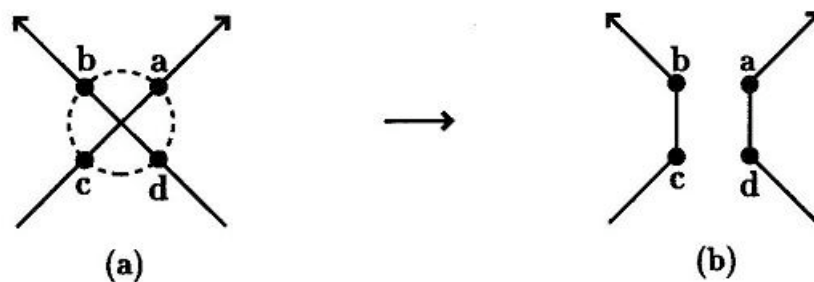
Remarque 2.14. — Soit K un nœud orienté. La surface de Seifert de K n'est pas unique.

Définition 2.15. — [BZ03, Définition 2.5]

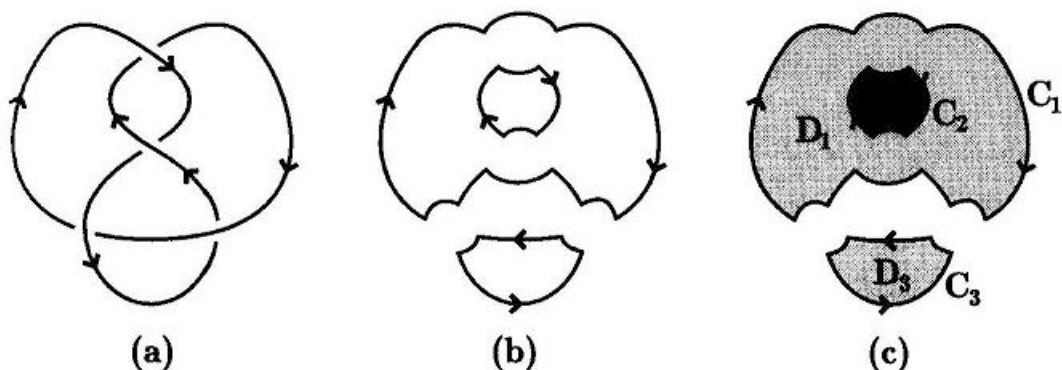
Le genre minimal des surfaces de Seifert qui bordent un nœud K est appelé *genre de K* .

2.4.3. Algorithme de Seifert. — On va construire une surface de Seifert d'un nœud K à partir d'une projection régulière de K . Soit D un diagramme d'un nœud orienté K . On décompose D en plusieurs courbes simples fermées.

Pour ce faire, on commence par tracer un cercle centré en un croisement. Ce cercle rencontre D en quatre points qu'on notera a, b, c, d (voir figure).



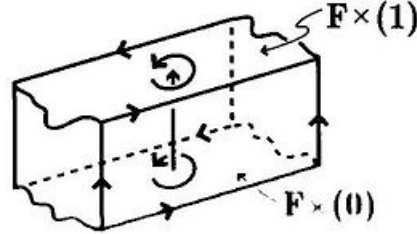
On relie ensuite les points a et d , et b et c comme le montre la figure précédente. En répétant cette opération à chaque croisement, on élimine tous les croisements de D . Ce dernier sera alors composé de plusieurs courbes fermées simples. Chaque courbe borde un disque.



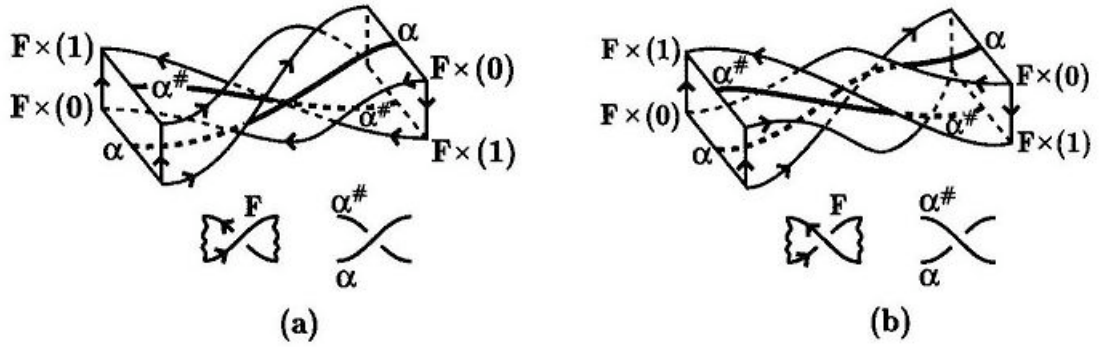
On relève ces disques à \mathbb{R}^3 à des niveaux différents et on les relie par des bandes correspondant aux croisements. La surface obtenue est une surface de Seifert de K . Pour plus de détails, voir [Mur08, Chapitre 5].

2.4.4. Matrice de Seifert. — Soit K un nœud orienté de genre g et soit F une surface de Seifert de K donnée selon la construction précédente. Alors F comporte exactement $2g$ courbes. On épaissit F , autrement dit, on trace

$F \times [0, 1]$ tout en respectant l'orientation.



Etant donnée une courbe α , on notera $\alpha \times (1)$ par $\alpha^\#$ et on gardera la notation α pour $\alpha \times (0)$.



La matrice

$$M = (Lk(\alpha_i, \alpha_j^\#))_{1 \leq i, j \leq 2g}$$

est appelée *matrice de Seifert* de K .

Ici, le nombre d'enlacement $Lk(\alpha_i, \alpha_j)$ est défini de la façon suivante : soit l_{ij} (resp. r_{ij}) le nombre de fois que α_i passe au dessus de α_j de la gauche vers la droite (resp. de la droite vers la gauche), alors $Lk(\alpha_i, \alpha_j) = l_{ij} - r_{ij}$. La matrice de Seifert n'est pas un invariant du nœud. Néanmoins, on peut définir des invariants du nœud à partir de la matrice de Seifert.

Proposition 2.16. — [BZ03, Théorème 8.8] et [BZ03, Proposition 8.11]

Soit V une matrice de Seifert d'un nœud K . Alors $\mathcal{A}(t) = V^T - tV$ est une matrice de présentation du module d'Alexander $H_1(X^\infty, \mathbb{Z})$.

Le polynôme d'Alexander de K est donné par :

$$\Delta_K(t) = \det(V^T - tV).$$

2.5. Exemple du nœud 10_{99}

Le premier exemple, dans le tableau de la classification des nœuds, dont la torsion n'est ni cyclique ni semi-simple est le nœud 10_{99} . La matrice de Seifert du nœud 10_{99} est donnée par

$$V = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(voir <http://www.indiana.edu/~knotinfo/>) donc une matrice de présentation du module d'Alexander est $\mathcal{A}(t) = V^T - tV$, où V^T désigne la matrice transposée de V . Le polynôme d'Alexander du nœud 10_{99} est donné par $\Delta_{10_{99}}(t) = (t^2 - t + 1)^4$ et ses racines sont $\alpha = e^{i\pi/3}$ et $\alpha^{-1} = e^{-i\pi/3}$.

Soit $n \geq 3$. Nous cherchons un vecteur ligne $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})$, où les $\varphi_j: \pi'/\pi'' \otimes \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}_\alpha$, $1 \leq j \leq n-1$, sont des applications \mathbb{C} -linéaires telles que

$$\Phi(t^k \cdot y) = \alpha^k \Phi(y) J_{n-1}^{-k}, \quad \forall y \in \pi'/\pi'' \otimes \mathbb{C} \text{ et } \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Comme Λ -module, le module d'Alexander à coefficients complexes du nœud 10_{99} est isomorphe à $\Lambda^8/(\Lambda^8 \mathcal{A}(t))$. Or le module Λ^8 est un Λ -module libre dont la base canonique est donnée par $e'_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, pour $1 \leq i \leq 8$. Posons $x_{ij} = \varphi_j(e'_i)$, pour $1 \leq i \leq 8$ et $1 \leq j \leq n-1$. Alors

$$\Phi(t^k \cdot e'_i) = \alpha^k \Phi(e'_i) J_{n-1}^{-k}, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \text{ et } \forall 1 \leq i \leq 8,$$

où $\Phi(e'_i)$ est le vecteur ligne $(x_{i1}, \dots, x_{i,n-1})$. De plus, pour que Φ définisse une application sur $\Lambda^8/(\Lambda^8 \mathcal{A}(t))$ il faut et il suffit que

$$(2.5) \quad \Phi(\Lambda^8 \mathcal{A}(t)) = 0$$

autrement dit,

$$\Phi(t^k e'_i \mathcal{A}(t)) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \text{ et } \forall 1 \leq i \leq 8.$$

Or

$$\begin{aligned} \Phi(t^k e'_i (V^T - tV)) &= \alpha^k \Phi(e'_i (V^T - \alpha V)) J_{n-1}^{-k} \\ &\quad + \alpha^{k+1} \Phi(e'_i V) (I_{n-1} - J_{n-1}^{-1}) J_{n-1}^{-k}. \end{aligned}$$

Donc (2.5) est équivalente à

$$(2.6) \quad (V^T - \alpha V)\varphi + \alpha V\varphi(I_{n-1} - J_{n-1}^{-1}) = 0,$$

où $\varphi = (\varphi_j(e'_i))_{\substack{1 \leq i \leq 8 \\ 1 \leq j \leq n-1}}$.

– Pour $n = 2$: La condition (2.6) est équivalente au système suivant :

$$\begin{cases} x_{11} = \alpha x_{51} \\ x_{21} = x_{61} \\ x_{31} = -x_{51} \\ x_{41} = \alpha^2 x_{51} + (\alpha - 1)x_{61} \\ x_{71} = (\alpha - 1)x_{61} \\ x_{81} = -\alpha x_{51} \end{cases}$$

Il s'en suit que $\dim H^1(\pi, \mathbb{C}_\alpha) = 2$, où π est le groupe du nœud 10_{99} .

– Pour $n = 3$: La condition (2.6) est équivalente à :

$$\begin{cases} x_{11} = \alpha x_{51} \\ x_{21} = x_{61} \\ x_{31} = -x_{51} \\ x_{41} = \alpha^2 x_{51} + (\alpha - 1)x_{61} \\ x_{71} = (\alpha - 1)x_{61} \\ x_{81} = -\alpha x_{51} \\ x_{12} = \alpha x_{51} \\ x_{22} = x_{62} + (-\alpha^2 + 2\alpha)x_{51} \\ x_{32} = -2x_{51} \\ x_{42} = (\alpha - 1)x_{62} + \alpha^2 x_{61} + (\alpha - 2)x_{51} \\ x_{52} = (-2\alpha^2 + \alpha)x_{61} + 2x_{51} \\ x_{72} = (\alpha - 1)x_{62} + (\alpha - 2)x_{51} + \alpha^2 x_{61} \\ x_{82} = (-2 - \alpha^2)x_{61} - \alpha x_{51} \end{cases}$$

Ceci implique que la $(t - \alpha)$ -torsion du module d'Alexander du nœud 10_{99} se décompose sous la forme :

$$\tau_\alpha = \frac{\Lambda}{(t - \alpha)^{q_1}} \oplus \frac{\Lambda}{(t - \alpha)^{q_2}}, \text{ avec } q_1, q_2 \geq 2.$$

– Pour $n = 4$: Par un calcul direct, on montre que pour que la condition (2.6) soit satisfaite, il faut que $x_{51} = x_{61} = 0$, autrement dit, il faut que $\varphi_1 \equiv 0$. Par dualité, nous concluons que le module d'Alexander à

coefficients complexes du nœud 10_9 se décompose sous la forme :

$$\frac{\Lambda}{(t - \alpha)^2} \oplus \frac{\Lambda}{(t - \alpha)^2} \oplus \frac{\Lambda}{(t - \alpha^{-1})^2} \oplus \frac{\Lambda}{(t - \alpha^{-1})^2}.$$

CHAPITRE 3

DÉFORMATIONS D'UNE REPRÉSENTATION MÉTABÉLIENNE DU GROUPE D'UN NŒUD DANS $SL(3, \mathbb{C})$

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'étude des déformations de certaines représentations métabéliennes du groupe du nœud dans $SL(3, \mathbb{C})$, associées à une racine double du polynôme d'Alexander, dans le cas d'une torsion cyclique. Nous commençons par présenter des résultats généraux au premier paragraphe. Les résultats essentiels concernent le cas de $SL(3, \mathbb{C})$ et sont énoncés dans le paragraphe 3.2. Le paragraphe 3.3 est consacré au calcul des dimensions de $H^*(\pi, sl(3, \mathbb{C}))$. La démonstration du théorème 3.9 est donné dans le paragraphe 3.4. Le dernier paragraphe contient la démonstration d'un résultat technique lié au calcul du produit-cup.

3.1. Groupes de cohomologie et variétés des représentations

Soit $n \geq 2$ et soit $\rho: \pi \rightarrow SL(n, \mathbb{C})$ une représentation du groupe du nœud dans $SL(n, \mathbb{C})$. On notera $sl(n, \mathbb{C})_\rho$ l'algèbre de Lie $sl(n, \mathbb{C})$ munie de la structure de π -module via l'action de la représentation adjointe $\text{Ad} \circ \rho$.

Le lemme suivant présente des dualités de Poincaré pour la cohomologie de l'espace complémentaire X du nœud. Pour plus de détails, voir [Por97].

Lemme 3.1. — Pour $i \in \{0, 1\}$, on a :

1. $H^i(X, sl(n, \mathbb{C})_\rho)^* \simeq H^{3-i}(X, \partial X, sl(n, \mathbb{C})_\rho)$.
2. $H^i(\partial X, sl(n, \mathbb{C})_\rho)^* \simeq H^{2-i}(\partial X, sl(n, \mathbb{C})_\rho)$.

En conséquence, $\dim H^1(\partial X, sl(n, \mathbb{C})_\rho) = 2 \dim H^0(\partial X, sl(n, \mathbb{C})_\rho)$.

Démonstration. — La forme de Killing sur $sl(n, \mathbb{C})$ donnée par

$$B(x, y) = \text{tr}(xy)$$

étant non dégénérée, car $sl(n, \mathbb{C})$ est une algèbre de Lie semi-simple, elle induit un produit-cup non dégénéré pour la cohomologie de X ainsi que pour la cohomologie de ∂X et pour $i \in \{0, 1\}$, on a :

$$H^i(X, sl(n, \mathbb{C})_\rho) \times H^{3-i}(X, \partial X, sl(n, \mathbb{C})_\rho) \rightarrow H^3(X, \partial X, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}$$

$$H^i(\partial X, sl(n, \mathbb{C})_\rho) \times H^{2-i}(\partial X, sl(n, \mathbb{C})_\rho) \rightarrow H^2(\partial X, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}$$

D'où les isomorphismes de Poincaré donnés dans le lemme.

En particulier, $\dim H^0(\partial X, sl(n, \mathbb{C})_\rho) = \dim H^2(\partial X, sl(n, \mathbb{C})_\rho)$. Comme la caractéristique d'Euler pour ∂X est nulle,

$$\dim H^1(\partial X, sl(n, \mathbb{C})_\rho) = 2 \dim H^0(\partial X, sl(n, \mathbb{C})_\rho).$$

□

Lemme 3.2. — Dans la suite exacte longue en cohomologie associée à la paire $(X, \partial X)$, on a :

$$(3.1) \quad H^1(X, sl(n, \mathbb{C})_\rho) \xrightarrow{\alpha} H^1(\partial X, sl(n, \mathbb{C})_\rho) \xrightarrow{\beta} H^2(X, \partial X, sl(n, \mathbb{C})_\rho)$$

avec $\text{rg } \alpha = \frac{1}{2} \dim H^1(\partial X, sl(n, \mathbb{C})_\rho)$.

Démonstration. — Par dualité, on obtient à partir de (3.1) la suite exacte :

$$H^1(X, sl(n, \mathbb{C})_\rho) \xrightarrow{\beta^*} H^1(\partial X, sl(n, \mathbb{C})_\rho) \xrightarrow{\alpha^*} H^2(X, \partial X, sl(n, \mathbb{C})_\rho).$$

Donc, $\beta^* = \alpha$ et

$$\begin{aligned} \dim H^1(\partial X, sl(n, \mathbb{C})_\rho) &= \text{rg } \beta + \dim \ker \beta \\ &= \text{rg } \beta^* + \text{rg } \alpha \\ &= 2 \text{rg } \alpha. \end{aligned}$$

□

Définitions 3.3. — Soient $n \geq 2$ et $\rho: \pi \rightarrow SL(n, \mathbb{C})$ une représentation. Une déformation formelle de ρ est donnée par un homomorphisme $\rho_\infty: \pi \rightarrow SL(n, \mathbb{C}[[t]])$ défini par

$$\rho_\infty(\gamma) = \exp \left(\sum_{i=1}^{\infty} t^i u_i(\gamma) \right) \rho(\gamma)$$

où $u_i: \pi \rightarrow sl(n, \mathbb{C})_\rho$ sont des 1-cochaînes de $C^1(\pi, sl(n, \mathbb{C})_\rho)$ telles que $p_0 \circ \rho_\infty = \rho$.

Ici, $p_0: SL(n, \mathbb{C}[[t]]) \rightarrow SL(n, \mathbb{C})$ désigne l'homomorphisme d'évaluation à $t = 0$ et $\mathbb{C}[[t]]$ est l'anneau des séries formelles en t .

On dit que ρ_∞ est une *déformation formelle jusqu'à l'ordre k* de ρ si ρ_∞ est un homomorphisme modulo t^{k+1} .

En général, une déformation formelle d'une représentation $\rho: \pi \rightarrow SL(n, \mathbb{C})$ correspond à une suite infinie d'équations d'obstruction qui sont définies d'une façon récursive (voir [Gol84]). Si la k -ième équation d'obstruction est nulle, la $(k+1)$ -ième obstruction est définie dans $H^2(\pi, sl(n, \mathbb{C})_\rho)$.

La condition d'homomorphie de ρ_∞ à l'ordre 1 est équivalente à $u_1 \in Z^1(\pi, sl(n, \mathbb{C})_\rho)$ est un cocycle. On dit que $u_1 \in Z^1(\pi, sl(n, \mathbb{C})_\rho)$ est *inté-grable* s'il existe une déformation formelle de ρ avec premier terme u_1 . Les obstructions à l'ordre 2 proviennent du produit-cup en cohomologie de u_1 avec lui-même.

Le lemme suivant donne un résultat analogue à celui de [HPSP01, Proposition 3.1]. Ce dernier concerne le cas de l'algèbre de Lie $sl(2, \mathbb{C})$.

Lemme 3.4. — Soient $u_1, \dots, u_k \in C^1(\pi, sl(n, \mathbb{C})_\rho)$ telles que

$$\rho_k(\gamma) = \exp \left(\sum_{i=1}^k t^i u_i(\gamma) \right) \rho(\gamma)$$

est un homomorphisme du groupe du nœud dans $SL(n, \mathbb{C}[[t]])$ modulo t^{k+1} . Alors il existe une classe d'obstruction $\zeta_{k+1} := \zeta_{k+1}^{(u_1, \dots, u_k)} \in H^2(\pi, sl(n, \mathbb{C})_\rho)$ vérifiant les propriétés suivantes :

(i) : Il existe une cochaîne $u_{k+1}: \pi \rightarrow sl(n, \mathbb{C})_\rho$ telle que

$$\rho_{k+1}(\gamma) = \exp \left(\sum_{i=1}^{k+1} t^i u_i(\gamma) \right) \rho(\gamma)$$

est un homomorphisme modulo t^{k+2} si et seulement si $\zeta_{k+1} = 0$.

(ii) : L'obstruction ζ_{k+1} est naturelle, i.e. si $f: \Gamma \rightarrow \pi$ est un homomorphisme de groupes alors $f^* \rho_k := \rho_k \circ f$ est aussi un homomorphisme modulo t^{k+1} et on a :

$$f^*(\zeta_{k+1}^{(u_1, \dots, u_k)}) = \zeta_{k+1}^{(f^* u_1, \dots, f^* u_k)}.$$

Démonstration. — Pour la démonstration, on renvoie à [HPSP01]. Il suffit de remplacer $SL(2, \mathbb{C})$ (resp. $sl(2, \mathbb{C})$) par $SL(n, \mathbb{C})$ (resp. $sl(n, \mathbb{C})$) dans la preuve de la proposition 3.1. \square

Soit $i: \partial X \rightarrow X$ l'inclusion naturelle du bord de X dans X et soit $i_\#: \pi_1(\partial X) \rightarrow \pi_1(X)$ l'application induite par i sur les groupes fondamentaux de X et ∂X .

Théorème 3.5. — Soient $n \geq 2$ et $\rho: \pi \rightarrow SL(n, \mathbb{C})$ une représentation du groupe du nœud dans $SL(n, \mathbb{C})$ telle que $\dim H^0(\partial X, sl(n, \mathbb{C})_\rho) = n - 1$. Supposons qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\rho(l) = P(\rho(\mu))$. Alors la représentation $\rho \circ i_\#$ est un point lisse de $R(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, SL(n, \mathbb{C}))$. Elle est contenue dans une composante de dimension $n^2 + n - 2$ de la variété des représentations $R(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, SL(n, \mathbb{C}))$.

Démonstration. — On a :

$$R(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, SL(n, \mathbb{C})) \simeq \{(A, B) \in (SL(n, \mathbb{C}))^2 \mid AB = BA\}$$

On peut aisément vérifier que si A et $B \in SL(n, \mathbb{C})$ commutent et si A admet des valeurs propres deux à deux distinctes, alors le couple (A, B) appartient à une composante de dimension égale à

$$\begin{aligned} d &= 2(n - 1) + \dim B^1(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, sl(n, \mathbb{C})_\rho) \\ &= 2 \dim H^0(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, sl(n, \mathbb{C})_\rho) + \dim B^1(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, sl(n, \mathbb{C})_\rho) \\ &= \dim H^1(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, sl(n, \mathbb{C})_\rho) + \dim B^1(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, sl(n, \mathbb{C})_\rho) \\ &= \dim Z^1(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, sl(n, \mathbb{C})_\rho) \end{aligned}$$

Le théorème est alors conséquence du fait que l'ensemble des matrices à valeurs propres distinctes est dense dans $SL(n, \mathbb{C})$. En effet, soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme tel que $\rho(l) = P(\rho(\mu))$. Nous considérons une suite (A_k) de matrices à valeurs propres distinctes qui converge vers $\rho(\mu)$ et nous posons $B'_k = P(A_k)$. Notons par $\sqrt[n]{}$ une détermination de la racine n -ième telle que $\sqrt[n]{1} = 1$. Il est facile de voir qu'à partir d'un certain rang, la matrice

$$B_k = \frac{B'_k}{\sqrt[n]{\det B'_k}}$$

est bien définie et que $\lim_{k \rightarrow \infty} B_k = \rho(l)$. De plus, puisque chaque couple (A_k, B_k) est contenu dans une composante de dimension d , il en est de même pour

$(\rho(\mu), \rho(l))$. Et pour terminer, on a :

$$\begin{aligned}
d &= 2(n-1) + \dim B^1(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, sl(n, \mathbb{C})_\rho) \\
&= 2(n-1) + n^2 - 1 - \dim H^0(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, sl(n, \mathbb{C})_\rho) \\
&= 2n - 2 + n^2 - 1 - n + 1 \\
&= n^2 + n - 2.
\end{aligned}$$

□

Le résultat suivant est implicitement contenu dans [HP05] :

Théorème 3.6. — Soit $n \geq 2$. Supposons que $\dim H^0(\partial X, sl(n, \mathbb{C})_\rho) = \dim H^2(X, sl(n, \mathbb{C})_\rho) = n - 1$ et que $H^0(X, sl(n, \mathbb{C})_\rho) = 0$. Si $\rho \circ i_\#$ est un point lisse de $R(\pi_1(\partial X), SL(n, \mathbb{C}))$, alors la représentation ρ est un point lisse de la variété des représentations $R(\pi, SL(n, \mathbb{C}))$.

Démonstration. — Rappelons que l'espace tangent de Zariski de $R(\pi, SL(n, \mathbb{C}))$ en ρ est contenu dans l'espace des 1-cocycles $Z^1(\pi, sl(n, \mathbb{C})_\rho)$. Pour montrer que ρ est un point lisse, il suffit de montrer que tous les cocycles dans $Z^1(\pi, sl(n, \mathbb{C})_\rho)$ sont intégrables. Pour ce faire, nous allons montrer que toutes les équations d'obstruction sont nulles en utilisant le fait qu'elles sont nulles sur le bord.

Considérons la suite exacte en cohomologie pour la paire $(X, \partial X)$

$$\begin{aligned}
0 \rightarrow H^0(\partial X, sl(n, \mathbb{C})_\rho) &\rightarrow H^1(X, \partial X, sl(n, \mathbb{C})_\rho) \\
&\rightarrow H^1(X, sl(n, \mathbb{C})_\rho) \rightarrow H^1(\partial X, sl(n, \mathbb{C})_\rho) \rightarrow H^2(X, \partial X, sl(n, \mathbb{C})_\rho) \\
&\rightarrow H^2(X, sl(n, \mathbb{C})_\rho) \xrightarrow{i_1^*} H^2(\partial X, sl(n, \mathbb{C})_\rho) \rightarrow 0
\end{aligned}$$

La dualité de Poincaré donne $\dim H^2(\partial X, sl(n, \mathbb{C})_\rho) = n - 1$. L'application i_1^* étant surjective et $\dim H^2(X, sl(n, \mathbb{C})_\rho) = \dim H^2(\partial X, sl(n, \mathbb{C})_\rho)$, il s'en suit que

$$H^2(X, sl(n, \mathbb{C})_\rho) \simeq H^2(\partial X, sl(n, \mathbb{C})_\rho).$$

En utilisant le fait que

$$H^2(X, sl(n, \mathbb{C})_\rho) \simeq H^2(\pi, sl(n, \mathbb{C})_\rho) \text{ et } H^2(\partial X, sl(n, \mathbb{C})_\rho) \simeq H^2(\pi_1(\partial X), sl(n, \mathbb{C})_\rho)$$

(voir le lemme 1.13), on en déduit que

$$i^*: H^2(\pi, sl(n, \mathbb{C})_\rho) \rightarrow H^2(\pi_1(\partial X), sl(n, \mathbb{C})_\rho)$$

est un isomorphisme.

Montrons maintenant que tout élément de $Z^1(\pi, sl(n, \mathbb{C})_\rho)$ est intégrable. Soient $u_1, \dots, u_k: \pi \rightarrow sl(n, \mathbb{C})_\rho$ des 1-cochaînes telles que

$$\rho_k(\gamma) = \exp \left(\sum_{i=1}^k t^i u_i(\gamma) \right) \rho(\gamma)$$

soit un homomorphisme modulo t^{k+1} . Alors la restriction $\rho_k \circ i_\#: \pi_1(\partial X) \rightarrow SL(n, \mathbb{C}[[t]])$ est aussi une déformation formelle d'ordre k . Comme $\rho \circ i_\#$ est un point lisse de la variété des représentations $R(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, SL(n, \mathbb{C}))$, le théorème des fonctions implicites formelles implique que $\rho_k \circ i_\#$ s'étend à une déformation formelle d'ordre $k+1$ (voir [HPSP01]). Par suite, on obtient :

$$0 = \zeta_{k+1}^{(i^* u_1, \dots, i^* u_k)} = i^* \zeta_{k+1}^{(u_1, \dots, u_k)}.$$

On utilise l'injectivité de i^* pour déduire que les obstructions $\zeta_{k+1}^{(u_1, \dots, u_k)}$ sont nulles.

Ainsi tous les cocycles dans $Z^1(\pi, sl(n, \mathbb{C})_\rho)$ sont intégrables. En appliquant le théorème d'Artin [Art68], on montre l'existence d'une déformation convergente à partir d'une déformation formelle de ρ .

D'où ρ est un point lisse de la variété des représentations $R(\pi, SL(n, \mathbb{C}))$. \square

3.2. Cas de $SL(3, \mathbb{C})$

Dans toute la suite, nous désignerons par $\alpha \in \mathbb{C}^*$ une racine du polynôme d'Alexander du nœud et nous supposons que $\dim H^1(\pi, \mathbb{C}_\alpha) = 1$, c'est-à-dire que la $(t - \alpha)$ -torsion du module d'Alexander à coefficients complexes est cyclique et est de la forme

$$\tau_\alpha = \Lambda / (t - \alpha)^q, \quad q \in \mathbb{N}^*.$$

D'après le corollaire 2.10 et le lemme 2.3, on sait que si α est une racine de multiplicité supérieure ou égale à 2 du polynôme d'Alexander (i.e. $q \geq 2$), alors il existe une représentation métabélienne, non abélienne $\tilde{\rho}: \pi \rightarrow G_3$ définie par

$$\tilde{\rho}(\gamma) = \begin{pmatrix} \alpha^{|\gamma|} & z(\gamma) & g(\gamma) \\ 0 & 1 & h(\gamma) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où $h: \pi \rightarrow \mathbb{C}$ est un homomorphisme non trivial, $z: \pi \rightarrow \mathbb{C}_\alpha$ est un 1-cocycle qui n'est pas un cobord et $g: \pi \rightarrow \mathbb{C}_\alpha$ est une 1-cochaîne qui vérifie

$\delta g + z \cup h = 0$. Rappelons que, modulo une correction par un cobord, nous pouvons supposer que $z(\mu) = g(\mu) = 0$.

L'homomorphisme $\tilde{\rho}$ induit une représentation du groupe du nœud dans $SL(3, \mathbb{C})$ donnée par

$$\begin{aligned}\rho_0: \pi &\rightarrow SL(3, \mathbb{C}) \\ \gamma &\mapsto \alpha^{-1/3}(\gamma)\tilde{\rho}(\gamma)\end{aligned}$$

Ici, $\alpha^{-1/3}: \pi \rightarrow \mathbb{C}^*$ est un homomorphisme tel que

$$(\alpha^{-1/3}(\gamma))^3 = \alpha^{-|\gamma|}, \quad \forall \gamma \in \pi.$$

(voir corollaire 1.18).

L'algèbre de Lie $sl(3, \mathbb{C})$ est munie de la structure de π -module via l'action de la représentation adjointe $\text{Ad} \circ \rho_0: \pi \rightarrow \text{Aut}(sl(3, \mathbb{C}))$ et elle est simplement notée $sl(3, \mathbb{C})$.

Notons par $(E_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}$ la base canonique de $M(3, \mathbb{C})$ et posons

$$D_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

alors $(D_1, D_2, (E_{ij})_{1 \leq i \neq j \leq 3})$ est une base de $sl(3, \mathbb{C})$. Posons également $\mathbb{C}_+(3) := \langle E_{12}, E_{23}, E_{13} \rangle$ et $b_+ := \langle D_1, D_2, E_{12}, E_{23}, E_{13} \rangle$ la sous-algèbre de Borel des matrices triangulaires supérieures.

L'action de $\text{Ad} \circ \tilde{\rho}$ sur $\mathbb{C}_+(3)$ et b_+ est donnée par :

$$\begin{aligned}(3.2) \quad \gamma \cdot E_{12} &= \alpha^{|\gamma|} E_{12} - \alpha^{|\gamma|} h(\gamma) E_{13} \\ \gamma \cdot E_{13} &= \alpha^{|\gamma|} E_{13} \\ \gamma \cdot E_{23} &= E_{23} + z(\gamma) E_{13} \\ \gamma \cdot D_1 &= D_1 + 3z(\gamma) E_{12} - (3z(\gamma)h(\gamma) - 3g(\gamma)) E_{13} \\ \gamma \cdot D_2 &= D_2 - 3h(\gamma) E_{23} - 3g(\gamma) E_{13}\end{aligned}$$

Ainsi $\mathbb{C}_+(3)$ et b_+ sont des π -sous modules de $sl(3, \mathbb{C})$.

De plus, le sous-espace vectoriel $\langle E_{13} \rangle$ est un π -sous module de $\mathbb{C}_+(3)$ dont l'action est donnée par la multiplication par α , donc on a la suite exacte courte suivante

$$(3.3) \quad 0 \rightarrow \langle E_{13} \rangle \rightarrow \mathbb{C}_+(3) \rightarrow \mathbb{C}_+(3)/\langle E_{13} \rangle \rightarrow 0.$$

Remarquons que $\langle E_{13} \rangle \simeq \mathbb{C}_\alpha$ et que $\mathbb{C}_+(3)/\langle E_{13} \rangle \simeq \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}_\alpha$. Le dernier isomorphisme est induit par la projection

$$\begin{aligned} pr: \mathbb{C}_+(3) &\rightarrow \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}_\alpha \\ M &\mapsto (p_{23}(M), p_{12}(M)) \end{aligned}$$

où p_{ij} désigne la projection sur la (i, j) -ième coordonnée.

D'autre part, $\mathbb{C}_+(3)$ étant un π -sous module de b_+ , nous posons $D_+ := b_+/\mathbb{C}_+(3)$. Alors $D_+ \simeq \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$. Cet isomorphisme est induit par la projection d'un élément de b_+ sur ses coordonnées en D_1 et D_2 . La suite courte

$$(3.4) \quad 0 \rightarrow \mathbb{C}_+(3) \rightarrow b_+ \rightarrow D_+ \rightarrow 0$$

est exacte.

L'action de $\text{Ad} \circ \tilde{\rho}$ sur les matrices triangulaires inférieures dans $sl(3, \mathbb{C})$ est donnée par :

$$\begin{aligned} (3.5) \quad \gamma \cdot E_{21} &= \alpha^{-|\gamma|} E_{21} \pmod{b_+} \\ \gamma \cdot E_{31} &= \alpha^{-|\gamma|} h(\gamma) E_{21} + \alpha^{-|\gamma|} E_{31} - \alpha^{-|\gamma|} z(\gamma) E_{32} \pmod{b_+} \\ \gamma \cdot E_{32} &= E_{32} \pmod{b_+}. \end{aligned}$$

Nous définissons $\mathbb{C}_-(3)$ comme étant le quotient $sl(3, \mathbb{C})/b_+$. Alors, on a la suite exacte courte de π -modules :

$$(3.6) \quad 0 \rightarrow b_+ \rightarrow sl(3, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}_-(3) \rightarrow 0$$

Posons $\overline{E}_{ij} = E_{ij} + b_+$, pour $1 \leq j < i \leq 3$. On remarque que $\langle \overline{E}_{21}, \overline{E}_{32} \rangle$ est un π -sous module de $\mathbb{C}_-(3)$ et que $\langle \overline{E}_{21}, \overline{E}_{32} \rangle \simeq \mathbb{C}_{\alpha^{-1}} \oplus \mathbb{C}$. De plus, le quotient $\mathbb{C}_-(3)/\langle \overline{E}_{21}, \overline{E}_{32} \rangle$ est isomorphe à $\mathbb{C}_{\alpha^{-1}}$. Cet isomorphisme est simplement donné par la projection sur la $(3, 1)$ -ième coordonnée.

D'où

$$(3.7) \quad 0 \rightarrow \mathbb{C}_{\alpha^{-1}} \oplus \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}_-(3) \rightarrow \mathbb{C}_{\alpha^{-1}} \rightarrow 0$$

est exacte.

Lemme 3.7. — On a :

$$1. \quad H^0(X, sl(3, \mathbb{C})) = 0.$$

Par conséquent, $\dim H^1(X, sl(3, \mathbb{C})) = \dim H^2(X, sl(3, \mathbb{C}))$.

$$2. \quad \dim H^0(\partial X, sl(3, \mathbb{C})) = \dim H^2(\partial X, sl(3, \mathbb{C})) = 2.$$

$$3. \quad \dim H^1(\partial X, sl(3, \mathbb{C})) = 4.$$

Démonstration. — On a :

$$\begin{aligned} H^0(X, sl(3, \mathbb{C})) &= \{A \in sl(3, \mathbb{C}) \mid \gamma \cdot A - A = 0, \forall \gamma \in X\} \\ &= \{0\} \end{aligned}$$

Ceci découle des formules (3.2), (3.5) et (3.10) et du fait que 1 n'est pas racine du polynôme d'Alexander du nœud. La caractéristique d'Euler pour X étant nulle, il vient que

$$\dim H^1(X, sl(3, \mathbb{C})) = \dim H^2(X, sl(3, \mathbb{C})).$$

De même,

$$\begin{aligned} H^0(\partial X, sl(3, \mathbb{C})) &= \{A \in sl(3, \mathbb{C}) \mid \gamma \cdot A - A = 0, \forall \gamma \in \partial X\} \\ &= \{A \in sl(3, \mathbb{C}) \mid \mu \cdot A = A\} \end{aligned}$$

Ceci est conséquence du fait que la longitude appartient au second sous-groupe des commutateurs π'' et qu'alors son action est triviale. Nous renvoyons de nouveau aux formules (3.2) et (3.5) qui donnent l'action de $\text{Ad} \circ \tilde{\rho}$ sur les éléments de la base de $sl(3, \mathbb{C})$ et à partir desquelles nous constatons que E_{23} et $D_1 = E_{22} - 2E_{11} + E_{33}$ sont les seuls éléments invariants par l'action de $\text{Ad} \circ \tilde{\rho}(\mu)$. Donc $\dim H^0(\partial X, sl(3, \mathbb{C})) = 2$, et par dualité, $\dim H^2(\partial X, sl(3, \mathbb{C}))$ est aussi égale à 2. Comme la caractéristique d'Euler pour ∂X est nulle, $\dim H^1(\partial X, sl(3, \mathbb{C})) = 4$. \square

Lemme 3.8. — *La représentation $\rho_0 \circ i_{\#}$ est un point lisse de $R(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, SL(3, \mathbb{C}))$. Elle est contenue dans une composante de dimension dix de la variété des représentations $R(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, SL(3, \mathbb{C}))$.*

Démonstration. — Ceci est conséquence directe du théorème 3.5 et du lemme 3.7. \square

La démonstration du théorème suivant sera donnée dans la paragraphe 3.4.

Théorème 3.9. — *Supposons que la $(t - \alpha)$ -torsion du module d'Alexander est cyclique de la forme $\Lambda/(t - \alpha)^q$. Si α est une racine double du polynôme d'Alexander, i.e. $q = 2$, alors il existe un arc analytique de représentations irréductibles non métabeliennes de π dans $SL(3, \mathbb{C})$ d'extrémité ρ_0 . De plus, la représentation ρ_0 est un point lisse de la variété des représentations $R(\pi, SL(3, \mathbb{C}))$ de dimension locale dix.*

3.3. Cohomologie des représentations métabéliennes

Rappelons que tout au long de ce paragraphe, nous supposons que $\dim H^1(\pi, \mathbb{C}_\alpha) = 1$. Plus précisément, nous supposons que la $(t - \alpha)$ -torsion du module d'Alexander à coefficients complexes est cyclique de la forme

$$\tau_\alpha = \Lambda / (t - \alpha)^q \quad , \text{ avec } q \geq 2 .$$

Rappelons aussi que :

$$\begin{aligned} H^0(\pi, \mathbb{C}) &\simeq \mathbb{C} & ; & \quad H^1(\pi, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C} & ; & \quad H^2(\pi, \mathbb{C}) = 0 \\ H^0(\pi, \mathbb{C}_\alpha) &= 0 & ; & \quad H^1(\pi, \mathbb{C}_\alpha) \simeq \mathbb{C} & ; & \quad H^2(\pi, \mathbb{C}_\alpha) \simeq \mathbb{C} \end{aligned}$$

(voir paragraphe 1.3).

Le but de ce paragraphe est de calculer les dimensions de $H^*(\pi, sl(3, \mathbb{C}))$ en fonction de la valeur de q .

Lemme 3.10. — *On a :*

$$\begin{aligned} H^0(\pi, \mathbb{C}_+(3)) &= 0 \\ H^1(\pi, \mathbb{C}_+(3)) &\simeq H^1(\pi, \mathbb{C}) \oplus H^1(\pi, \mathbb{C}_\alpha) \\ H^2(\pi, \mathbb{C}_+(3)) &\simeq H^2(\pi, \mathbb{C}_\alpha) \oplus H^2(\pi, \mathbb{C}_\alpha) \end{aligned}$$

En particulier, $\dim H^1(\pi, \mathbb{C}_+(3)) = \dim H^2(\pi, \mathbb{C}_+(3)) = 2$.

Démonstration. — La suite exacte longue en cohomologie associée à (3.3) est donnée par :

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(\pi, \mathbb{C}_+(3)) \rightarrow H^0(\pi, \mathbb{C}) \xrightarrow{\delta^1} H^1(\pi, \mathbb{C}_\alpha) \rightarrow H^1(\pi, \mathbb{C}_+(3)) \\ \rightarrow H^1(\pi, \mathbb{C}) \oplus H^1(\pi, \mathbb{C}_\alpha) \xrightarrow{\delta^2} H^2(\pi, \mathbb{C}_\alpha) \rightarrow H^2(\pi, \mathbb{C}_+(3)) \rightarrow H^2(\pi, \mathbb{C}_\alpha) \rightarrow 0 . \end{aligned}$$

Commençons par calculer $\delta^1: H^0(\pi, \mathbb{C}) \rightarrow H^1(\pi, \mathbb{C}_\alpha)$. Soit $c \in \mathbb{C} \simeq H^0(\pi, \mathbb{C})$, on a : $\delta^1(c) = \{d_c\}$, où $d_c: \pi \rightarrow \mathbb{C}_\alpha$ est donnée, pour tout $\gamma \in \pi$, par :

$$\begin{aligned} d_c(\gamma) &= p_{13}(\delta(cE_{23})(\gamma)) \\ &= cp_{13}((\gamma - 1) \cdot E_{23}) \\ &= cz(\gamma) . \end{aligned}$$

Comme $\{z\} \neq 0$ dans $H^1(\pi, \mathbb{C}_\alpha)$ et $\dim H^0(\pi, \mathbb{C}) = \dim H^1(\pi, \mathbb{C}_\alpha) = 1$, δ^1 est un isomorphisme. Ceci implique que $H^0(\pi, \mathbb{C}_+(3)) = 0$ et la suite exacte

longue en cohomologie devient :

$$(3.8) \quad 0 \rightarrow H^1(\pi, \mathbb{C}_+(3)) \rightarrow H^1(\pi, \mathbb{C}) \oplus H^1(\pi, \mathbb{C}_\alpha) \xrightarrow{\delta^2} H^2(\pi, \mathbb{C}_\alpha) \\ \rightarrow H^2(\pi, \mathbb{C}_+(3)) \rightarrow H^2(\pi, \mathbb{C}_\alpha) \rightarrow 0.$$

Considérons maintenant $\delta^2: H^1(\pi, \mathbb{C}) \oplus H^1(\pi, \mathbb{C}_\alpha) \rightarrow H^2(\pi, \mathbb{C}_\alpha)$. Soit $h' \in Z^1(\pi, \mathbb{C}) \simeq \text{Hom}(\pi, \mathbb{C})$, alors $\delta^2(\{h'\}, 0) = \{d_{h'}\}$, avec pour tous $\gamma_1, \gamma_2 \in \pi$

$$\begin{aligned} d_{h'}(\gamma_1, \gamma_2) &= p_{13}(\delta(h'E_{23})(\gamma_1, \gamma_2)) \\ &= p_{13}(\gamma_1 \cdot (h'(\gamma_2)E_{23}) - h'(\gamma_1\gamma_2)E_{23} + h'(\gamma_1)E_{23}) \\ &= z \cup h'(\gamma_1, \gamma_2). \end{aligned}$$

De même, pour $z' \in Z^1(\pi, \mathbb{C}_\alpha)$, on a $\delta^2(0, \{z'\}) = \{d_{z'}\}$, avec

$$d_{z'}(\gamma_1, \gamma_2) = -h \cup z'(\gamma_1, \gamma_2).$$

Donc $\delta^2: (\{h'\}, \{z'\}) \mapsto \{z \cup h'\} - \{h \cup z'\}$. Puisque α n'est pas une racine simple du polynôme d'Alexander, $\delta^2 \equiv 0$ [AL02, Théorème 3.2]. Donc la suite exacte longue (3.8) donne les suites exactes courtes suivantes :

$$0 \rightarrow H^1(\pi, \mathbb{C}_+(3)) \xrightarrow{\simeq} H^1(\pi, \mathbb{C}) \oplus H^1(\pi, \mathbb{C}_\alpha) \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow H^2(\pi, \mathbb{C}_\alpha) \rightarrow H^2(\pi, \mathbb{C}_+(3)) \rightarrow H^2(\pi, \mathbb{C}_\alpha) \rightarrow 0$$

desquelles, on déduit que $\dim H^1(\pi, \mathbb{C}_+(3)) = \dim H^2(\pi, \mathbb{C}_+(3)) = 2$.

□

Dans le lemme suivant, nous calculons les dimensions de $H^*(\pi, b_+)$.

Lemme 3.11. — *On a :*

1. $\dim H^0(\pi, b_+) = 0$.
2. Si $q = 2$, alors $\dim H^1(\pi, b_+) = \dim H^2(\pi, b_+) = 1$.
3. Si $q > 2$, alors $\dim H^1(\pi, b_+) = \dim H^2(\pi, b_+) = 2$.

Démonstration. — La suite exacte courte

$$0 \rightarrow \mathbb{C}_+(3) \rightarrow b_+ \rightarrow D_+ \rightarrow 0$$

induit la suite exacte longue suivante en cohomologie

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(\pi, b_+) \rightarrow H^0(\pi, \mathbb{C}) \oplus H^0(\pi, \mathbb{C}) \xrightarrow{\delta^1} H^1(\pi, \mathbb{C}_+(3)) \rightarrow H^1(\pi, b_+) \\ \rightarrow H^1(\pi, \mathbb{C}) \oplus H^1(\pi, \mathbb{C}) \xrightarrow{\delta^2} H^2(\pi, \mathbb{C}_+(3)) \rightarrow H^2(\pi, b_+) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Calculons $\delta^1: H^0(\pi, \mathbb{C}) \oplus H^0(\pi, \mathbb{C}) \rightarrow H^1(\pi, \mathbb{C}_+(3))$. Soient $c_1, c_2 \in \mathbb{C} \simeq H^0(\pi, \mathbb{C})$ et soit p_+ la projection sur $\mathbb{C}_+(3)$. On a : $\delta^1(\{c_1\}, 0) = \{d_{c_1}\}$, où

$$\begin{aligned} d_{c_1}(\gamma) &= p_+(\delta(c_1 D_1)(\gamma)) \\ &= c_1 p_+((\gamma - 1) \cdot D_1) \\ &= 3c_1 z(\gamma) E_{12} - (3z(\gamma)h(\gamma) - 3g(\gamma))c_1 E_{13} \end{aligned}$$

et $\delta^1(0, \{c_2\}) = \{d_{c_2}\}$, où

$$\begin{aligned} d_{c_2}(\gamma) &= p_+(\delta(c_2 D_2)(\gamma)) \\ &= c_2 p_+((\gamma - 1) \cdot D_2) \\ &= -3c_2 h(\gamma) E_{23} - 3c_2 g(\gamma) E_{13} \end{aligned}$$

Comme $\{z\} \neq 0$ dans $H^1(\pi, \mathbb{C}_\alpha)$ et $\{h\} \neq 0$ dans $H^1(\pi, \mathbb{C})$, δ^1 est injective. De plus, $\dim H^1(\pi, \mathbb{C}_+(3)) = 2$ et $\dim H^0(\pi, \mathbb{C}) = 1$ donc δ^1 est un isomorphisme. D'où $H^0(\pi, b_+) = 0$ et la suite

$$0 \rightarrow H^1(\pi, b_+) \rightarrow H^1(\pi, \mathbb{C}) \oplus H^1(\pi, \mathbb{C}) \xrightarrow{\delta^2} H^2(\pi, \mathbb{C}_+(3)) \rightarrow H^2(\pi, b_+) \rightarrow 0$$

est exacte.

Soient $h_1, h'_1 \in Z^1(\pi, \mathbb{C})$. Alors $\delta^2(\{h_1\}, 0) = \{d_{h_1}\}$, où pour tous $\gamma_1, \gamma_2 \in \pi$,

$$\begin{aligned} d_{h_1}(\gamma_1, \gamma_2) &= p_+(\delta(h_1 D_2)(\gamma_1, \gamma_2)) \\ &= p_+(\gamma_1 \cdot (h_1(\gamma_2) D_2) - h_1(\gamma_1 \gamma_2) D_2 + h_1(\gamma_1) D_2) \\ &= -3h \cup h_1(\gamma_1, \gamma_2) E_{23} - 3g \cup h_1(\gamma_1, \gamma_2) E_{13} \end{aligned}$$

et $\delta^2(0, \{h'_1\}) = \{d_{h'_1}\}$, où

$$\begin{aligned} d_{h'_1}(\gamma_1, \gamma_2) &= p_+(\delta(h'_1 D_1)(\gamma_1, \gamma_2)) \\ &= p_+(\gamma_1 \cdot (h'_1(\gamma_2) D_1) - h'_1(\gamma_1 \gamma_2) D_1 + h'_1(\gamma_1) D_1) \\ &= 3z \cup h'_1(\gamma_1, \gamma_2) E_{12} - 3((zh - g) \cup h'_1)(\gamma_1, \gamma_2) E_{13}. \end{aligned}$$

Ici, $zh(\gamma)$ est simplement donné par le produit $z(\gamma)h(\gamma)$, pour $\gamma \in \pi$. Comme $H^2(\pi, \mathbb{C}) = 0$, $\{h \cup h_1\} = 0$ et il existe $h_2: \pi \rightarrow \mathbb{C}$ une 1-cochaîne vérifiant $\delta h_2 + h \cup h_1 = 0$. Alors,

$$\delta^2(\{h_1\}, 0) = \{d_{h_1} - \delta f_1\},$$

où $f_1: \pi \rightarrow \mathbb{C}_+(3)$ est une 1-cochaîne définie par $f_1(\gamma) = 3h_2(\gamma) E_{23}$, pour tout $\gamma \in \pi$ et

$$(d_{h_1} - \delta f_1)(\gamma_1, \gamma_2) = 3(z \cup h_2(\gamma_1, \gamma_2) + g \cup h_1(\gamma_1, \gamma_2)) E_{13}, \quad \forall \gamma_1, \gamma_2 \in \pi.$$

Or d'après le corollaire 2.10, $\{z \cup h_2 + g \cup h_1\} = 0$ dans $H^2(\pi, \mathbb{C}_\alpha)$ si et seulement si $q > 2$.

Soit $g' : \pi \rightarrow \mathbb{C}_\alpha$ une 1-cochaîne vérifiant $\delta g' + z \cup h'_1 = 0$. Alors,

$$\delta^2(0, \{h'_1\}) = \{d_{h'_1} + \delta f'_1\},$$

où $f'_1 : \pi \rightarrow \mathbb{C}_+(3)$ est une 1-cochaîne donnée par $f'_1(\gamma) = 3g'(\gamma)E_{12}$, pour tout $\gamma \in \pi$ et on a :

$$(d_{h'_1} + \delta f'_1)(\gamma_1, \gamma_2) = -3(h \cup g'(\gamma_1, \gamma_2) + (zh - g) \cup h'_1(\gamma_1, \gamma_2))E_{13}$$

D'où $\text{Im } \delta^2 \subset H^2(\pi, \mathbb{C}_\alpha)$. En particulier, $\text{rg } \delta^2 \leq 1$ et deux cas sont possibles :

- **Premier cas** : $q = 2$, ceci implique que $\{z \cup h_2 + g \cup h_1\} \neq 0$ dans $H^2(\pi, \mathbb{C}_\alpha)$. Donc $\text{rg } \delta^2 = 1$ et la suite exacte longue en cohomologie donne $\dim H^1(\pi, b_+) = \dim H^2(\pi, b_+) = 1$.
- **Deuxième cas** : $q > 2$, alors $(z \cup h_2 + g \cup h_1)E_{13}$ et $(h \cup g' + (zh - g) \cup h'_1)E_{13}$ sont deux 2-cocycles de classe nulle dans $H^2(\pi, \mathbb{C}_\alpha)$. En effet, posons $\tilde{g} = zh'_1 - g'$, alors $\delta \tilde{g} + h'_1 \cup z = 0$ et $\{h \cup g' + \tilde{g} \cup h'_1\} = 0$ dans $H^2(\pi, \mathbb{C}_\alpha)$ si et seulement si $q > 2$, d'après le lemme 3.28. Il s'en suit que $\delta^2 \equiv 0$ et d'après la suite exacte longue en cohomologie, $H^1(\pi, b_+) \simeq H^1(\pi, D_+)$ et $H^2(\pi, b_+) \simeq H^2(\pi, \mathbb{C}_+(3))$. En particulier, $\dim H^1(\pi, b_+) = \dim H^2(\pi, b_+) = 2$.

□

Rappelons que $\mathbb{C}_-(3)$ désigne le quotient $sl(3, \mathbb{C})/b_+$, alors on a le résultat suivant :

Lemme 3.12. — On a :

$$H^0(\pi, \mathbb{C}_-(3)) \simeq H^0(\pi, \mathbb{C})$$

et les deux suites

$$0 \rightarrow H^1(\pi, \mathbb{C}_{\alpha^{-1}}) \oplus H^1(\pi, \mathbb{C}) \rightarrow H^1(\pi, \mathbb{C}_-(3)) \rightarrow H^1(\pi, \mathbb{C}_{\alpha^{-1}}) \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow H^2(\pi, \mathbb{C}_{\alpha^{-1}}) \rightarrow H^2(\pi, \mathbb{C}_-(3)) \rightarrow H^2(\pi, \mathbb{C}_{\alpha^{-1}}) \rightarrow 0$$

sont exactes.

En particulier, on a :

$$\dim H^0(\pi, \mathbb{C}_-(3)) = 1$$

$$\dim H^1(\pi, \mathbb{C}_-(3)) = 3$$

$$\dim H^2(\pi, \mathbb{C}_-(3)) = 2.$$

Démonstration. — La suite exacte longue en cohomologie associée à (3.7) donne :

$$0 \rightarrow H^0(\pi, \mathbb{C}) \xrightarrow{\simeq} H^0(\pi, \mathbb{C}_-(3)) \rightarrow 0$$

et

$$\begin{aligned} 0 &\xrightarrow{\delta^1} H^1(\pi, \mathbb{C}) \oplus H^1(\pi, \mathbb{C}_{\alpha^{-1}}) \rightarrow H^1(\pi, \mathbb{C}_-(3)) \rightarrow H^1(\pi, \mathbb{C}_{\alpha^{-1}}) \\ &\xrightarrow{\delta^2} H^2(\pi, \mathbb{C}_{\alpha^{-1}}) \rightarrow H^2(\pi, \mathbb{C}_-(3)) \rightarrow H^2(\pi, \mathbb{C}_{\alpha^{-1}}) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Soit z_- un 1-cocycle dans $Z^1(\pi, \mathbb{C}_{\alpha^{-1}})$, alors $\delta^2(\{z_-\}) = \{d_{z_-}\}$, où $d_{z_-} : \pi \times \pi \rightarrow \mathbb{C}_{\alpha^{-1}}$ est la 2-cochaîne définie pour tous $\gamma_1, \gamma_2 \in \pi$ par :

$$\begin{aligned} d_{z_-}(\gamma_1, \gamma_2) &= p_{21}(\delta(z_- E_{31})(\gamma_1, \gamma_2)) \\ &= p_{21}(\gamma_1 \cdot (z_- E_{31})(\gamma_2) - z_-(\gamma_1 \gamma_2) E_{31} + z_-(\gamma_1) E_{31}) \\ &= \alpha^{-|\gamma_1|} h(\gamma_1) z_-(\gamma_2) \\ &= h \cup z_-(\gamma_1, \gamma_2). \end{aligned}$$

Puisque $q \geq 2$, $\{h \cup z_-\} = 0$ dans $H^2(\pi, \mathbb{C}_{\alpha^{-1}})$, donc $\delta^2 \equiv 0$ et la démonstration est achevée. □

Proposition 3.13. — On a :

1. $H^0(\pi, sl(3, \mathbb{C})) = 0$.
2. Si $q = 2$, alors $\dim H^1(\pi, sl(3, \mathbb{C})) = \dim H^2(\pi, sl(3, \mathbb{C})) = 2$.
3. Si $q > 2$, alors $\dim H^1(\pi, sl(3, \mathbb{C})) = \dim H^2(\pi, sl(3, \mathbb{C})) \geq 2$.

Démonstration. — La suite exacte courte de π -modules (3.6) induit en cohomologie la suite suivante :

$$\begin{aligned} (3.9) \quad 0 &\rightarrow H^0(\pi, sl(3, \mathbb{C})) \rightarrow H^0(\pi, \mathbb{C}_-(3)) \xrightarrow{\delta^1} H^1(\pi, b_+) \rightarrow H^1(\pi, sl(3, \mathbb{C})) \\ &\rightarrow H^1(\pi, \mathbb{C}_-(3)) \xrightarrow{\delta^2} H^2(\pi, b_+) \rightarrow H^2(\pi, sl(3, \mathbb{C})) \rightarrow H^2(\pi, \mathbb{C}_-(3)) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Comme $H^0(\pi, sl(3, \mathbb{C})) = 0$ (voir le lemme 3.7), δ^1 est injective.

– **Premier cas :** $q = 2$.

Puisque $\dim H^0(\pi, \mathbb{C}_-(3)) = \dim H^1(\pi, b_+)$ (voir lemme 3.12 et lemme 3.11), δ^1 est un isomorphisme. Donc, on obtient :

$$0 \rightarrow H^0(\pi, \mathbb{C}_-(3)) \xrightarrow{\simeq} H^1(\pi, b_+) \rightarrow 0$$

et

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^1(\pi, sl(3, \mathbb{C})) \rightarrow H^1(\pi, \mathbb{C}_-(3)) \xrightarrow{\delta^2} H^2(\pi, b_+) \\ \rightarrow H^2(\pi, sl(3, \mathbb{C})) \rightarrow H^2(\pi, \mathbb{C}_-(3)) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Maintenant, $H^1(\pi, \mathbb{C}) \oplus H^1(\pi, \mathbb{C}_{\alpha^{-1}})$ s'injecte dans $H^1(\pi, \mathbb{C}_-(3))$ (lemme 3.12). Pour comprendre l'application δ^2 , nous allons regarder de plus près la manière dont $H^1(\pi, \mathbb{C})$ s'injecte dans $H^1(\pi, \mathbb{C}_-(3))$. Plus précisément, pour tout $\gamma \in \pi$, on a :

$$(3.10) \quad \gamma \cdot E_{32} = E_{32} + \frac{1}{3}h(\gamma)(2D_2 + D_1) + g(\gamma)E_{12} - h^2(\gamma)E_{23} - g(\gamma)h(\gamma)E_{13}$$

et pour $h' \in Z^1(\pi, \mathbb{C}) \simeq \text{Hom}(\pi, \mathbb{C})$,

$$\begin{aligned} \delta^2(h' \overline{E}_{32}) &:= \{d_{h'}\} \\ &= \left\{ \frac{1}{3}h \cup h'(2D_2 + D_1) + g \cup h'E_{12} - h^2 \cup h'E_{23} - gh \cup h'E_{13} \right\}. \end{aligned}$$

Puisque $H^2(\pi, \mathbb{C}) = 0$, il existe une 1-cochaîne $h_2: \pi \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $\delta h_2 + h \cup h' = 0$ et

$$\delta^2(h' \overline{E}_{32}) = \{d_{h'} + \delta f'\},$$

où $f': \pi \rightarrow \mathbb{C}_-(3)$ est la 1-cochaîne donnée par :

$$f'(\gamma) = \frac{1}{3}h_2(\gamma)(2D_2 + D_1) \quad , \quad \forall \gamma \in \pi.$$

Ainsi pour tous $\gamma_1, \gamma_2 \in \pi$,

$$\begin{aligned} (d_{h'} + \delta f')(\gamma_1, \gamma_2) &= (g \cup h' + z \cup h_2)(\gamma_1, \gamma_2)E_{12} - (h^2 \cup h' + 2h \cup h_2)(\gamma_1, \gamma_2)E_{23} \\ &\quad - (gh \cup h' + (zh + g) \cup h_2)(\gamma_1, \gamma_2)E_{13}. \end{aligned}$$

Comme $\{(g \cup h' + z \cup h_2)E_{12}\} \neq 0$ dans $H^2(\pi, \mathbb{C}_+(3))/H^2(\pi, \mathbb{C}_\alpha)$ (voir le corollaire 2.10), $\delta^2 \neq 0$. De plus, $\dim H^2(\pi, b_+) = 1$, donc $\text{rg } \delta^2 = 1$ et la suite exacte longue nous permet de conclure que

$$\begin{aligned} H^1(\pi, \mathbb{C}_-(3)) &\simeq H^1(\pi, sl(3, \mathbb{C})) \oplus H^2(\pi, b_+) \\ H^2(\pi, sl(3, \mathbb{C})) &\simeq H^2(\pi, \mathbb{C}_-(3)) \end{aligned}$$

En particulier, compte tenu des résultats des lemmes 3.10, 3.11 et 3.12, on obtient $\dim H^1(\pi, sl(3, \mathbb{C})) = \dim H^2(\pi, sl(3, \mathbb{C})) = 2$.

– **Deuxième cas : $q > 2$**

Nous avons vu dans le lemme 3.11 que, dans ce cas, $\dim H^1(\pi, b_+) = \dim H^2(\pi, b_+) = 2$. Le résultat découle alors du fait que $\text{rg } \delta^1 = 1$ et que $\text{rg } \delta^2 \leq 2$.

Remarquons que $\dim H^2(\pi, sl(3, \mathbb{C})) = 2$ si et seulement si $\text{rg } \delta^2 = 2$. \square

Remarque 3.14. — Nous pouvons retrouver le fait que

$$\dim H^1(\pi, sl(3, \mathbb{C})) = \dim H^2(\pi, sl(3, \mathbb{C})) \geq 2$$

indépendamment de la valeur de q . En effet, considérons la suite exacte en cohomologie pour la paire $(X, \partial X)$:

$$H^1(X, \partial X, sl(3, \mathbb{C})) \rightarrow H^1(X, sl(3, \mathbb{C})) \xrightarrow{i_2^*} H^1(\partial X, sl(3, \mathbb{C})),$$

la dualité de Poincaré donne $\text{rg } i_2^* = \frac{1}{2} \dim H^1(\partial X, sl(3, \mathbb{C})) = 2$. Donc $\dim H^1(X, sl(3, \mathbb{C})) = \dim H^1(\pi, sl(3, \mathbb{C})) \geq 2$. Comme $H^0(\pi, sl(3, \mathbb{C})) = 0$, $\dim H^2(\pi, sl(3, \mathbb{C})) = \dim H^1(\pi, sl(3, \mathbb{C}))$ (caractéristique d'Euler nulle pour X).

3.4. Nature des déformations

Tout au long de ce paragraphe, nous supposons que α est racine double du polynôme d'Alexander du nœud.

Définition 3.15. — Une représentation $\rho \in R(\pi, SL(n, \mathbb{C}))$ est dite *réductible* s'il existe un sous-espace vectoriel non trivial et propre de \mathbb{C}^n invariant par $\rho(\pi)$. Sinon, ρ est dite *irréductible*.

Le résultat suivant est conséquence du théorème de Burnside :

Théorème 3.16. — [Lam98, Théorème 1] *Une représentation $\rho: \pi \rightarrow SL(n, \mathbb{C})$ est irréductible si et seulement si $\rho(\pi)$ engendre l'algèbre des matrices carrées $M(n, \mathbb{C})$.*

Définition 3.17. — L'*orbite* d'une représentation $\rho: \pi \rightarrow SL(n, \mathbb{C})$ est l'ensemble

$$\mathcal{O}(\rho) = \{A\rho A^{-1} \mid A \in SL(n, \mathbb{C})\} \subset R(\pi, SL(n, \mathbb{C})).$$

Définition 3.18. — Une représentation *semi-simple* est complètement réductible, i.e. c'est une somme directe de représentations irréductibles.

Théorème 3.19. — [LM85, Théorème 1.27]

Soit $\rho \in R(\pi, SL(n, \mathbb{C}))$. Alors l'orbite de ρ est fermée si et seulement si ρ est semi-simple.

Corollaire 3.20. — *L'orbite d'une représentation irréductible est fermée.*

Lemme 3.21. — *L'orbite de la représentation ρ_0 n'est pas fermée.*

Démonstration. — Soit $\lambda: \mathbb{C}^* \rightarrow SL(3, \mathbb{C})$ l'application définie par

$$\lambda(t) = \text{diag}(t, 1, t^{-1}).$$

Posons, pour $\gamma \in \pi$,

$$\rho_\alpha(\gamma) := \lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t) \rho_0(\gamma) \lambda(t)^{-1}.$$

Alors, $\rho_\alpha: \pi \rightarrow SL(3, \mathbb{C})$ est une représentation abélienne, avec $\rho_\alpha(\mu) = \alpha^{-1/3} \text{diag}(\alpha, 1, 1)$. Remarquons que l'orbite d'une représentation $\rho: \pi \rightarrow SL(3, \mathbb{C})$ peut être identifiée au quotient de $SL(3, \mathbb{C})$ par le stabilisateur de ρ . Alors, l'orbite de ρ_α est fermée et elle est de dimension 4. En effet, pour retrouver l'action de $\text{Ad} \circ \rho_\alpha$ sur les éléments de la base de $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})_{\rho_\alpha}$, il suffit de remplacer z , h et g par 0 dans les formules (3.2), (3.5) et (3.10). De plus, ρ_α est contenue dans l'adhérence de l'orbite de ρ_0 , qui est de dimension 8. D'où le résultat. \square

Soit $\langle S_1, \dots, S_p \mid R_1, \dots, R_{p-1} \rangle$ une présentation de Wirtinger du groupe du nœud. Rappelons que, modulo un cobord, on peut supposer que $z(S_1) = g(S_1) = 0$ et qu'une correction par un cobord se traduit par une conjugaison de ρ_0 . Puisque le cocycle z n'est pas un cobord, le deuxième générateur S_2 peut être choisi tel que $z(S_2) = b \neq 0 = z(S_1)$. Ainsi, on a :

$$\rho_0(S_1) = \begin{pmatrix} \alpha^{2/3} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^{-1/3} & \alpha^{-1/3} \\ 0 & 0 & \alpha^{-1/3} \end{pmatrix} \text{ et } \rho_0(S_2) = \begin{pmatrix} \alpha^{2/3} & b & c \\ 0 & \alpha^{-1/3} & \alpha^{-1/3} \\ 0 & 0 & \alpha^{-1/3} \end{pmatrix}.$$

Lemme 3.22. — *Soit $\rho_t: \pi \rightarrow SL(3, \mathbb{C})$ un arc de représentations d'extrémité ρ_0 . Alors, il existe un arc C_t dans $SL(3, \mathbb{C})$ vérifiant $C_0 = I_3$ et tel que, pour t assez petit, on a :*

$$C_t \rho_t(S_1) C_t^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}(t) & a_{23}(t) \\ 0 & a_{32}(t) & a_{33}(t) \end{pmatrix}.$$

Démonstration. — Commençons par remarquer que $\alpha^{2/3}$ est une racine simple du polynôme caractéristique de $\rho_0(S_1)$. Donc il existe $a_{11}(t)$ valeur propre simple de $\rho_t(S_1)$ qui dépend analytiquement de t . Le vecteur propre associé v_t peut être choisi de sorte qu'il dépende analytiquement de t et tel que v_0 soit le premier vecteur u_1 de la base canonique de \mathbb{C}^3 . Ainsi, pour t suffisamment

petit, (v_t, u_2, u_3) forme une base de \mathbb{C}^3 dans laquelle $\rho_t(S_1)$ se met sous la forme

$$\rho_t(S_1) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) \\ 0 & a_{22}(t) & a_{23}(t) \\ 0 & a_{32}(t) & a_{33}(t) \end{pmatrix}.$$

Notons par $A_{11}(t)$ la matrice extraite de $\rho_t(S_1)$, obtenue en supprimant la première ligne et la première colonne. Alors, pour t assez petit, la matrice $(A_{11}(t) - a_{11}(t)I_2)$ est inversible. Par suite, le système

$$(a_{12}(t), a_{13}(t)) + (x(t), y(t))(A_{11}(t) - a_{11}(t)I_2) = 0$$

admet une solution unique. Pour terminer, il suffit de remarquer que, pour

$$P(t) = \begin{pmatrix} 1 & x(t) & y(t) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la matrice $P(t)\rho_t(S_1)P(t)^{-1}$ correspond à la forme que nous cherchons. \square

Proposition 3.23. — Soient $A(t)$ et $B(t)$ deux matrices, dépendantes analytiquement de t et telles que

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}(t) & a_{23}(t) \\ 0 & a_{32}(t) & a_{33}(t) \end{pmatrix}, \quad A(0) = \rho_0(S_1) \text{ et } B(0) = \rho_0(S_2).$$

Si $b'_{31}(0) \neq 0$, alors pour $t \neq 0$ et suffisamment petit, les matrices $A(t)$ et $B(t)$ engendrent l'algèbre des matrices carrées $M(3, \mathbb{C})$.

Démonstration. — Soient $\mathcal{M}_t \subset M(3, \mathbb{C})$ l'algèbre engendrée par $A(t)$ et $B(t)$, et $\chi_{A_{11}}(x)$ le polynôme caractéristique de $A_{11}(t)$. La valeur propre $a_{11}(t)$ étant simple, on a $\chi_{A_{11}}(a_{11}(t)) \neq 0$, pour t assez petit. Ainsi,

$$\frac{\chi_{A_{11}}(A(t))}{\chi_{A_{11}}(a_{11}(t))} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes (1, 0, 0) \in \mathbb{C}[A(t)] \subset \mathcal{M}_t.$$

Les vecteurs $(1, 0, 0)A(0)$, $(1, 0, 0)B(0)$ et $(1, 0, 0)B(0)^2$ forment une base de l'espace des vecteurs lignes. Donc, pour t assez petit, $(1, 0, 0)\mathcal{M}_t$ coïncide avec l'espace des vecteurs lignes.

D'autre part, considérons les trois vecteurs colonnes :

$$a(t) := A(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b(t) := B(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } c(t) := A(t)b(t)$$

et posons la fonction $f(t) := \det(a(t), b(t), c(t))$. Alors, $f(t) = a_{11}(t)\tilde{f}(t)$, avec

$$\tilde{f}(t) = \begin{vmatrix} b_{21}(t) & a_{22}(t)b_{21}(t) + a_{23}(t)b_{31}(t) \\ b_{31}(t) & a_{32}(t)b_{21}(t) + a_{33}(t)b_{31}(t) \end{vmatrix}.$$

Il est facile de vérifier que $\tilde{f}(0) = \tilde{f}'(0) = 0$ et que $\tilde{f}''(0) = -\alpha^{-1/3}(b'_{31}(0))^2$.

D'où $\tilde{f}(t) \neq 0$, pour t suffisamment petit et $t \neq 0$. Par conséquent, $\mathcal{M}_t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

est l'espace des vecteurs colonnes. Sachant que toute matrice de rang 1 peut s'écrire $v \otimes w$, où v est un vecteur colonne et w est un vecteur ligne, on en déduit que \mathcal{M}_t contient toutes les matrices de rang 1. Le résultat est alors conséquence du fait que toute matrice de $M(3, \mathbb{C})$ est une somme des matrices de rang 1. □

Proposition 3.24. — Soit $z_{\pm} \in Z^1(\pi, \mathbb{C}_{\alpha^{\pm 1}})$ deux cocycles qui ne sont pas des cobords et tels que $z_+(S_1) = z_-(S_1) = 0$. Si $z_+(S_2) \neq 0$, alors $z_-(S_2) \neq 0$.

Démonstration. — Posons $a := \alpha + \alpha^{-1}$. Le polynôme d'Alexander du nœud étant symétrique, a est défini sur \mathbb{Q} . De plus, on a une extension de corps de degré deux $\mathbb{Q}(a) \subset \mathbb{Q}(\alpha)$ dont l'équation de définition est donnée par $x^2 - ax + 1 = 0$. On a aussi un automorphisme de Galois $\tau: \mathbb{Q}(\alpha) \rightarrow \mathbb{Q}(\alpha)$ d'ordre 2 qui fixe le corps $\mathbb{Q}(a)$ et tel que $\tau(\alpha) = \alpha^{-1}$.

Soient $\pi = \langle S_1, \dots, S_p \mid R_1, \dots, R_{p-1} \rangle$ une présentation de Wirtinger du groupe du nœud. Alors, chacun des cocycles z_{\pm} correspond à une solution du système linéaire $J_K(\alpha^{\pm 1})\mathbf{z} = 0$, où $J_K(t) \in M_{p-1,p}(\mathbb{Z}[t, t^{-1}])$ désigne la matrice jacobienne du nœud. Plus précisément, si $\mathbf{z} = (s_1, \dots, s_p)$ est solution du système $J_K(\alpha^{\pm 1})\mathbf{z} = 0$, alors le cocycle correspondant est donné par $z_{\pm}(S_i) = s_i$, pour $1 \leq i \leq p$ [HP05, § 6].

Si \mathbf{z}_+ est solution de $J_K(\alpha)\mathbf{z} = 0$, avec $s_1 = 0$ et $s_2 \neq 0$, alors $\tau(\mathbf{z}_+)$ est solution du système linéaire $J_K(\alpha^{-1})\mathbf{z} = 0$. De plus, τ étant un automorphisme, on a $\tau(s_1) = 0$ et $\tau(s_2) \neq 0$. Notons par \tilde{z}_- le cocycle défini par $\tilde{z}_-(S_i) = \tau(s_i)$. Alors \tilde{z}_- n'est pas un cobord puisque $\tilde{z}_-(S_1) \neq \tilde{z}_-(S_2)$.

D'après la dualité de Blanchfield, α^{-1} est une racine double du polynôme d'Alexander et $\dim H^1(\pi, \mathbb{C}_{\alpha^{-1}}) = 1$ (voir remarque 1.12). Il existe alors $t \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$ tels que $z_-(S_i) = t\tilde{z}_-(S_i) + (\alpha^{-1} - 1)b$. Or, $z_-(S_1) = 0$, donc $b = 0$ et $z_-(S_2) = t\tilde{z}_-(S_2) \neq 0$. □

Revenons à la suite exacte longue en cohomologie (3.9) et rappelons qu'on suppose que la $(t - \alpha)$ -torsion du module d'Alexander du nœud est de la forme

$$\Lambda / (t - \alpha)^2 .$$

Dans ce cas, la suite

$$0 \rightarrow H^1(\pi, sl(3, \mathbb{C})) \rightarrow H^1(\pi, \mathbb{C}_-(3)) \xrightarrow{\delta^2} H^2(\pi, b_+) \rightarrow 0$$

est exacte, avec $\text{rg } \delta^2 = 1$. La projection

$$sl(3, \mathbb{C}) \rightarrow sl(3, \mathbb{C}) / b_+ \simeq \mathbb{C}_-(3)$$

induit alors un isomorphisme

$$\psi: H^1(\pi, sl(3, \mathbb{C})) \xrightarrow{\sim} \ker(H^1(\pi, \mathbb{C}_-(3)) \xrightarrow{\delta^2} H^2(\pi, b_+)) .$$

Soit $z_- \in Z^1(\pi, \mathbb{C}_{\alpha^{-1}})$ un 1-cocycle, qui n'est pas un cobord et tel que $z_-(S_1) = 0$. D'après la proposition 3.24, $z_-(S_2) \neq 0$. De plus, il existe deux cochaînes $g_-: \pi \rightarrow \mathbb{C}_{\alpha^{-1}}$ et $g_0: \pi \rightarrow \mathbb{C}$ telles que

$$\delta g_- + h \cup z_- = 0 \text{ et } \delta g_0 + z \cup z_- = 0 .$$

Rappelons aussi qu'on a la suite exacte courte suivante :

$$0 \rightarrow H^1(\pi, \mathbb{C}_{\alpha^{-1}}) \oplus H^1(\pi, \mathbb{C}) \rightarrow H^1(\pi, \mathbb{C}_-(3)) \rightarrow H^1(\pi, \mathbb{C}_{\alpha^{-1}}) \rightarrow 0 .$$

Alors, en tenant compte de la formule (3.10), on en déduit que $H^1(\pi, \mathbb{C}_-(3))$ est un sous-espace vectoriel de dimension trois dont une base est donnée par $(\{\bar{z}_1\}, \{\bar{z}_2\}, \{\bar{z}_3\})$, avec :

$$\bar{z}_1 = z_- \bar{E}_{21} , \quad \bar{z}_2 = h \bar{E}_{32} \text{ et } \bar{z}_3 = z_- \bar{E}_{31} - g_0 \bar{E}_{32} + g_- \bar{E}_{21} .$$

Ainsi tout cocycle $z \in Z^1(\pi, sl(3, \mathbb{C}))$ est de la forme

$$z = \begin{pmatrix} * & * & * \\ t_1 z_- + t_3 g_- + \delta b_1 & * & * \\ t_3 z_- + \delta b_3 & t_2 h - t_3 g_0 & * \end{pmatrix} ,$$

avec $t_i \in \mathbb{C}$.

Définition 3.25. — Une représentation $\rho \in R(\pi, SL(n, \mathbb{C}))$ est dite *stable* si son orbite est fermée et si son stabilisateur est fini.

Théorème 3.26. — *Il existe un arc analytique de représentations $\rho_t: \pi \rightarrow SL(3, \mathbb{C})$ d'extrémité ρ_0 , tel que ρ_t est stable pour t suffisamment petit et $t \neq 0$.*

Démonstration. — Commençons par remarquer que le stabilisateur d'une représentation $\rho: \pi \rightarrow SL(3, \mathbb{C})$ est fini si et seulement si $H^0(\pi, sl(3, \mathbb{C})_\rho) = 0$. Comme $H^0(\pi, sl(3, \mathbb{C})) = 0$, il existe un voisinage de ρ_0 dans lequel toutes les représentations ont un stabilisateur fini.

Nous considérons $z \in Z^1(\pi, sl(3, \mathbb{C}))$ un 1-cocycle tel que

$$\psi(z) = t_1 \bar{z}_1 + t_2 \bar{z}_2 + t_3 \bar{z}_3 \quad , \text{ avec } t_3 \neq 0.$$

Un tel cocycle existe car $\bar{z}_2 \notin \ker \delta^2$ et $\dim \ker \delta^2 = 2$. Soit ρ_t une déformation de ρ_0 de premier terme z . Appliquons le résultat du lemme 3.22 à cette déformation et posons $A(t) = \rho_t(S_1)$ et $B(t) = \rho_t(S_2)$. Comme $a_{31}(t) = 0$,

$$a'_{31}(0) = \alpha^{2/3}(t_3 z_-(S_1) + (\alpha^{-1} - 1)b_3) = 0$$

et $b_3 = 0$. D'où $b'_{31}(0) = \alpha^{2/3}t_3 z_-(S_2) \neq 0$, d'après la proposition 3.24. Ainsi, d'après la proposition 3.23 et le théorème 3.16, ρ_t est irréductible pour t assez petit et $t \neq 0$. \square

Corollaire 3.27. — *Il existe des déformations non métabéliennes de ρ_0 .*

Démonstration. — Soit $\rho_t: \pi \rightarrow SL(3, \mathbb{C})$ un arc analytique de représentations irréductibles. Alors, pour t suffisamment petit, la valeur de $\text{tr } \rho_t(\mu)$ est proche de $\text{tr } \rho_0(\mu) = \alpha^{-1/3}(\alpha + 2)$. Or, -2 n'est pas racine du polynôme d'Alexander du nœud, car sinon $(x + 2) \mid \Delta_K(x)$ et ainsi $3 \mid \Delta_K(1)$, ce qui est impossible puisque $\Delta_K(1) = \pm 1$. Donc $\text{tr } \rho_0(\mu) \neq 0$ et pour t assez petit, $\text{tr } \rho_t(\mu) \neq 0$.

D'après [BF, Théorème 1.2], $\text{tr } \rho(\mu) = 0$ pour toute représentation métabélienne irréductible $\rho: \pi \rightarrow SL(3, \mathbb{C})$. D'où ρ_t est irréductible et non métabélienne pour t suffisamment petit. \square

Nous pouvons, maintenant, présenter la démonstration du théorème 3.9 :

Démonstration du théorème 3.9. — Rappelons que $\dim H^0(\partial X, sl(3, \mathbb{C})) = 2$ et appliquons le théorème 3.6, en tenant compte des résultats du lemme 3.8 et de la proposition 3.13, pour montrer que tous les cocycles dans $Z^1(\pi, sl(3, \mathbb{C}))$ sont intégrables. Donc la représentation ρ_0 est un point lisse de $R(\pi, SL(3, \mathbb{C}))$. Elle est contenue dans une composante R_{ρ_0} de dimension dix de la variété des représentations puisque $\dim Z^1(\pi, sl(3, \mathbb{C})) = 10$ (voir lemme 1.16). D'après le théorème 3.26 et le corollaire 3.27, la composante R_{ρ_0} contient des représentations irréductibles non métabéliennes. \square

3.5. Produit-cup et 2-cocycles

Le but de ce paragraphe est de montrer le lemme 3.28 qui est un lemme technique essentiel pour la démonstration de la proposition 3.13. Dans la suite, nous donnons une réponse à la question suivante : quand est ce qu'un certain 2-cocycle $c: \pi \times \pi \rightarrow \mathbb{C}_\alpha$ est un cobord ?

Rappelons que T désigne le groupe cyclique infini engendré par t , où t est l'image du méridien par la projection canonique $\pi \rightarrow \pi/\pi' \simeq T = \langle t | - \rangle$. D'après le corollaire 1.11, un 1-cocycle $z \in Z^1(\pi, \mathbb{C}_\alpha)$ peut être regardé comme un Λ -homomorphisme de $\pi'/\pi'' \otimes \mathbb{C}$ à valeurs dans \mathbb{C}_α . D'où z induit un homomorphisme \mathbb{C} -linéaire $\varphi_0: \pi'/\pi'' \otimes \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}_\alpha$.

Soit $z \in Z^1(\pi, \mathbb{C}_\alpha)$ un 1-cocycle qui n'est pas un cobord et soit $h: \pi \rightarrow \mathbb{C}$ un homomorphisme non trivial. Nous nous proposons de montrer qu'il existe une 1-cochaîne $g: \pi \rightarrow \mathbb{C}_\alpha$ telle que :

$$(3.11) \quad -\delta g = z \cup h$$

si et seulement s'il existe un homomorphisme $\varphi_1: \pi'/\pi'' \rightarrow \mathbb{C}$ qui vérifie :

$$(3.12) \quad \varphi_1(\mu^k u \mu^{-k}) = \alpha^k \varphi_1(u) - k \alpha^k h(\mu) \varphi_0(u), \quad \forall k \in \mathbb{Z} \text{ et } \forall u \in \pi'/\pi''.$$

Cette démonstration est donnée dans [AL02].

Il est facile de voir que si g existe, il suffit de considérer $\varphi_1 := g|_{\pi'/\pi''}$. En effet, $g|_{\pi''} \equiv 0$ et g peut être identifiée à une 1-cochaîne de $\pi'/\pi'' \rtimes T$ dans \mathbb{C}_α . De plus, on peut supposer que $g(t) = 0$. D'ailleurs, si $g(t) = \omega$, il suffit de remplacer g par la cochaîne $g + \delta d$, où $d = \frac{\omega}{1 - \alpha}$. Réciproquement, supposons qu'il existe un homomorphisme $\varphi_1: \pi'/\pi'' \rightarrow (\mathbb{C}, +)$ vérifiant (3.12) et posons $g(ut^k) = \varphi_1(u) + k \varphi_0(u)$. Par un calcul direct, on vérifie que g satisfait (3.11). Remarquons que φ_1 définit, par extension des scalaires, un homomorphisme \mathbb{C} -linéaire de $\pi'/\pi'' \otimes \mathbb{C}$ dans \mathbb{C}_α .

De même, on peut vérifier que l'existence d'une 1-cochaîne $g': \pi \rightarrow \mathbb{C}_\alpha$ telle que

$$-\delta g' = h \cup z$$

est équivalente à l'existence d'un homomorphisme \mathbb{C} -linéaire $\psi_1: \pi'/\pi'' \otimes \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}_\alpha$ vérifiant :

$$\psi_1(\mu^k u \mu^{-k}) = \alpha^k \psi_1(u) + k \alpha^k h(\mu) \varphi_0(u), \quad \forall k \in \mathbb{Z} \text{ et } \forall u \in \pi'/\pi'' \otimes \mathbb{C}.$$

De plus, on a : $g'(ut^k) = \psi_1(u)$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Les homomorphismes φ_1 et ψ_1 existent puisque $q \geq 2$ (voir corollaire 2.10). Remarquons que $\{z \cup h + h \cup z\} = 0$ dans $H^2(\pi, \mathbb{C}_\alpha)$. Plus précisément, on

$a : z \cup h + h \cup z + \delta f = 0$, pour $f : \pi \rightarrow \mathbb{C}_\alpha$ définie par $f(\gamma) = h(\gamma)z(\gamma)$. De plus, nous montrons le résultat suivant :

Lemme 3.28. — Soit $z \in Z^1(\pi, \mathbb{C}_\alpha)$ un 1-cocycle qui n'est pas un cobord. Soient $h, h' : \pi \rightarrow \mathbb{C}$ deux homomorphismes non triviaux et $g, g' : \pi \rightarrow \mathbb{C}_\alpha$ deux 1-cochaînes vérifiant $-\delta g = z \cup h'$ et $-\delta g' = h \cup z$. Alors, $h \cup g + g' \cup h'$ est un 2-cocycle dans $Z^2(\pi, \mathbb{C}_\alpha)$ et $\{h \cup g + g' \cup h'\} = 0$ dans $H^2(\pi, \mathbb{C}_\alpha)$ si et seulement si $q > 2$.

Démonstration. — La démonstration va se faire en deux étapes. D'abord, nous commençons par établir l'équivalence entre le fait que le 2-cocycle $h \cup g + g' \cup h'$ soit de classe nulle dans $H^2(\pi, \mathbb{C}_\alpha)$ et l'existence d'un homomorphisme $\varphi_2 : \pi'/\pi'' \rightarrow (\mathbb{C}, +)$ tel que :

$$(3.13) \quad \varphi_2(\mu^k u \mu^{-k}) = \alpha^k \varphi_2(u) + k \alpha^k \varphi_1(u) - k \alpha^k \psi_1(u) - k^2 \alpha^k \varphi_0(u), \quad \forall u \in \pi'/\pi'' \text{ et } \forall k \in \mathbb{Z}.$$

L'étape suivante consiste à montrer qu'un tel homomorphisme existe si et seulement si $q > 2$.

L'équation $\{h \cup g + g' \cup h'\} = 0$ dans $H^2(\pi, \mathbb{C}_\alpha)$ est équivalente à l'existence d'une 1-cochaîne $g_2 \in C^1(\pi, \mathbb{C}_\alpha)$ telle que

$$(3.14) \quad -\delta g_2 = h \cup g + g' \cup h'.$$

Il est facile de vérifier que $g_2|_{\pi''} \equiv 0$. De plus, on peut supposer que $g(\mu) = g'(\mu) = g_2(\mu) = 0$. En effet, si $g(\mu) = \omega$, on remplace g par la cochaîne $g + \delta d$, où $d = \frac{\omega}{1 - \alpha}$. Il en est de même pour g' et g_2 . Donc $g_2|_{\pi'}$ induit un homomorphisme $\varphi_2 : \pi'/\pi'' \rightarrow \mathbb{C}_\alpha$.

Réciproquement, soit $\varphi_2 : \pi'/\pi'' \rightarrow (\mathbb{C}, +)$ un homomorphisme vérifiant (3.13) et soit $g_2 : \pi'/\pi'' \rtimes T \rightarrow \mathbb{C}_\alpha$ définie par $g_2(ut^k) = \varphi_2(u) + k \psi_1(u)$.

Pour tous $(ut^k), (vt^l) \in \pi'/\pi'' \rtimes T$, on a :

$$\begin{aligned} g_2((ut^k)(vt^l)) &= \varphi_2(u + \mu^k v \mu^{-k}) + (k + l) \psi_1(u + \mu^k v \mu^{-k}) \\ &= g_2(ut^k) + \alpha^k g_2(vt^l) + k \alpha^k g(vt^l) + l g'(ut^k) \\ &= g_2(ut^k) + \alpha^k g_2(vt^l) + h \cup g((ut^k), (vt^l)) + g' \cup h'((ut^k), (vt^l)). \end{aligned}$$

D'où g_2 vérifie (3.14).

L'homomorphisme φ_2 définit, par extension des scalaires, un homomorphisme \mathbb{C} -linéaire de $\pi'/\pi'' \otimes \mathbb{C}$ à valeurs dans \mathbb{C}_α et on a :

$$\begin{aligned}
& (t - \alpha)^q u = 0, \quad \forall u \in \tau_\alpha \\
& \Rightarrow \varphi_2((t - \alpha)^q u) = 0, \quad \forall u \in \tau_\alpha \\
& \Rightarrow \varphi_2\left(\sum_{k=0}^q \binom{q}{k} t^k \alpha^{q-k} (-1)^k u\right) = 0, \quad \forall u \in \tau_\alpha \\
& \Rightarrow \sum_{k=0}^q \binom{q}{k} \alpha^{q-k} (-1)^k (\alpha^k \varphi_2(u) + k \alpha^k h(\mu) \varphi_1(u) - k \alpha^k h'(\mu) \psi_1(u) \\
& \quad - k^2 \alpha^k h(\mu) h'(\mu) \varphi_0(u)) = 0, \quad \forall u \in \tau_\alpha \\
& \Rightarrow \sum_{k=0}^q \binom{q}{k} (-1)^k \varphi_2(u) + \sum_{k=0}^q \binom{q}{k} (-1)^k k (h(\mu) \varphi_1(u) - h'(\mu) \psi_1(u)) \\
& \quad - \sum_{k=0}^q \binom{q}{k} (-1)^k k^2 h(\mu) h'(\mu) \varphi_0(u) = 0, \quad \forall u \in \tau_\alpha.
\end{aligned}$$

Puisque $\sum_{k=0}^q \binom{q}{k} (-1)^k = 0$ et $\sum_{k=0}^q \binom{q}{k} (-1)^k k = 0$ (car $q \geq 2$) (voir [GR07]), alors on obtient :

$$(3.15) \quad \sum_{k=0}^q \binom{q}{k} (-1)^k k^2 h(\mu) h'(\mu) \varphi_0(u) = 0$$

- Si $q = 2$, (3.15) implique que $\varphi_0(u) = 0$, $\forall u \in \tau_\alpha$, ce qui signifie que $\{z\} \equiv 0$.
- Si $q > 2$, considérons $(e_j)_{0 \leq j \leq q-1}$ la base de τ_α donnée par $e_j = [(t - \alpha)^j]$ et φ_2 l'application \mathbb{C} -linéaire définie sur τ_α par :

$$\begin{cases} \varphi_2(e_0) = 0 \\ \varphi_2(e_1) = -\alpha h(\mu) h'(\mu) \varphi_0(e_0) \\ \varphi_2(e_2) = -2\alpha^2 h(\mu) h'(\mu) \varphi_0(e_0) \\ \varphi_2(e_j) = 0 \end{cases}, \forall q-1 \geq j \geq 3$$

et définie par 0 ailleurs.

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, écrivons $[t^k - \alpha^k] = a_0 e_0 + \dots + a_{q-1} e_{q-1}$, alors, $a_0 = 0$ et $a_j = \binom{k}{j} \alpha^{k-j}$, $\forall 1 \leq j \leq q-1$.

En écrivant :

$$\begin{aligned}\varphi_2(\mu^k e_j \mu^{-k} - \alpha^k e_j) &= \varphi_2(a_0 e_j + a_1 e_{j+1} + \dots + a_{q-j-1} e_{q-1}) \\ &= a_1 \varphi_2(e_{j+1}) + \dots + a_{q-j-1} \varphi_2(e_{q-1})\end{aligned}$$

on peut facilement vérifier que φ_2 satisfait la condition (3.13).

□

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

La majorité des travaux, traitant de l'étude de l'espace des représentations du groupe fondamental d'une variété de dimension trois dans un groupe de Lie, concernent les groupes de Lie $SU(2)$ et $SL(2, \mathbb{C})$. Nous considérons dans cette thèse d'autres exemples de groupes de Lie. Plus précisément, dans le but de généraliser un résultat classique de Burde et de Rham, nous nous intéressons à l'étude de certaines représentations métabéliennes du groupe d'un nœud de S^3 dans le groupe des matrices triangulaires supérieures inversibles d'ordre n , $n \geq 2$.

Cette étude nous permet de retrouver la décomposition du module d'Alexander à coefficients complexes du nœud. Qu'en est-il pour les entrelacs ?

Nous montrons dans le théorème 1.24 qu'étant donné un nœud K de S^3 dont le polynôme d'Alexander est non trivial (i.e. $\Delta_K(t) \neq 1$) et $n \geq 3$, il existe des représentations non métabéliennes du groupe du nœud dans le groupe des matrices triangulaires supérieures inversibles d'ordre n , noté G_n . La question qui se pose à ce niveau : pour quels $n \geq 3$, existe-t-il des représentations non k -métabéliennes ($k \geq 3$) du groupe du nœud dans G_n ?

Il est à noter que les représentations non 3-métabéliennes ont été utilisées pour définir un invariant du nœud à partir de son système périphérique [BZ03, Chapitre 14].

Dans la deuxième partie de la thèse, nous nous inspirons des travaux de [HPSP01] et [HP05], qui portent sur l'étude des déformations d'une représentation réductible du groupe fondamental d'une variété de dimension

trois dans $SL(2, \mathbb{C})$ et $PSL(2, \mathbb{C})$, associée à une racine simple du polynôme d'Alexander, pour déformer une représentation métabélienne du groupe du nœud dans $SL(3, \mathbb{C})$.

- Est-il possible d'utiliser les déformations d'une représentation abélienne ou métabélienne du groupe du nœud dans $SL(3, \mathbb{C})$ pour avoir des informations concernant les déformations d'une représentation abélienne du groupe du nœud dans $SL(2, \mathbb{C})$?
- Peut-on aller encore plus loin et étudier les déformations des représentations dans $SL(4, \mathbb{C})$, et plus généralement dans $SL(n, \mathbb{C})$, pour $n \geq 4$?
- Dans notre étude, nous supposons que α est une racine du polynôme d'Alexander et que la $(t - \alpha)$ -torsion du module d'Alexander à coefficients complexes du nœud est cyclique. Nous montrons que si α est une racine double du polynôme d'Alexander alors une certaine représentation métabélienne est limite d'un arc analytique de représentations non métabéliennes irréductibles du groupe du nœud dans $SL(3, \mathbb{C})$. Que se passe-t-il si la multiplicité de α est supérieure à 2 ?
- L'orbite de la représentation métabélienne que nous déformons est non fermée, ce qui fait que l'étude de la structure locale de la variété des caractères n'est pas aisée. On se demande alors : peut-on déformer une représentation abélienne diagonale donnée du groupe du nœud dans $SL(3, \mathbb{C})$ dont l'orbite est fermée et serait-il ainsi plus facile d'étudier la variété des caractères ?

Tout au long de cette thèse, nous considérons le cas des nœuds de S^3 . Les résultats qu'on vient de montrer se généralisent-ils aux nœuds dans les sphères d'homologie rationnelle de dimension 3 ? aux nœuds virtuels ?

L'espace des représentations du groupe d'un nœud dans $SU(2)$ ou $SL(2, \mathbb{C})$ a été utilisé pour définir un invariant topologique qui n'est pas un invariant d'homotopie. Il s'agit de la torsion de Reidemeister à coefficients dans la représentation adjointe associée à une représentation régulière du groupe d'un nœud dans $SU(2)$ ou $SL(2, \mathbb{C})$. La torsion de Reidemeister est un invariant plus subtil que les invariants usuels utilisés en topologie algébrique tels que les nombres de Betti, le groupe fondamental ou les groupes d'homologie.

J. Porti s'est intéressé dans [Por97] à l'étude d'une torsion de Reidemeister à coefficients dans la représentation adjointe associée à une représentation

régulière du groupe du nœud dans $SL(2, \mathbb{C})$. En s'inspirant des travaux de X. Lin [Lin92] et M. Heusener [Heu03], une version raffinée avec un signe a été introduite par J. Dubois dans [Dub03]. Dans [Dub06], l'auteur présente le calcul explicite de la torsion de Reidemeister pour les nœuds fibrés.

Remarquons que cette torsion est en lien avec l'invariant de Chern-Simons [DK07].

Nous espérons pouvoir exploiter les résultats présentés dans cette thèse pour définir une torsion de Reidemeister à coefficients dans la représentation adjointe associée à une représentation du groupe du nœud dans $SL(3, \mathbb{C})$.

BIBLIOGRAPHIE

- [AL02] Leila Ben Abdelghani and Daniel Lines. Involutions on knot groups and varieties of representations in a Lie group. *J. Knot Theory Ramifications*, 11(1) :81–104, 2002.
- [Art68] M. Artin. On the solutions of analytic equations. *Invent. Math.*, 5 :277–291, 1968.
- [BA98] Leila Ben Abdelghani. *Espace des représentations du groupe d'un nœud dans un groupe de Lie*. Université de Bourgogne, 1998. Thesis.
- [BA00] Leila Ben Abdelghani. Espace des représentations du groupe d'un nœud classique dans un groupe de Lie. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 50(4) :1297–1321, 2000.
- [BF] Hans. U Boden and Stefan Friedl. Metabelian $sl(n, c)$ representations of knot groups. *arXiv :0803. 4329*.
- [BLP05] Michel Boileau, Bernhard Leeb, and Joan Porti. Geometrization of 3-dimensional orbifolds. *Ann. of Math. (2)*, 162(1) :195–290, 2005.
- [Bro94] Kenneth S. Brown. *Cohomology of groups*, volume 87 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1994. Corrected reprint of the 1982 original.
- [Bur67] Gerhard Burde. Darstellungen von Knotengruppen. *Math. Ann.*, 173 :24–33, 1967.
- [BZ98] S. Boyer and X. Zhang. On Culler-Shalen seminorms and Dehn filling. *Ann. of Math. (2)*, 148(3) :737–801, 1998.

- [BZ03] Gerhard Burde and Heiner Zieschang. *Knots*, volume 5 of *de Gruyter Studies in Mathematics*. Walter de Gruyter & Co., Berlin, second edition, 2003.
- [CCG⁺94] D. Cooper, M. Culler, H. Gillet, D. D. Long, and P. B. Shalen. Plane curves associated to character varieties of 3-manifolds. *Invent. Math.*, 118(1) :47–84, 1994.
- [Che46] Claude Chevalley. La théorie des groupes de Lie. In *Proc. First Canadian Math. Congress, Montreal, 1945*, pages 338–354. University of Toronto Press, Toronto, 1946.
- [CHK00] Daryl Cooper, Craig D. Hodgson, and Steven P. Kerckhoff. *Three-dimensional orbifolds and cone-manifolds*, volume 5 of *MSJ Memoirs*. Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2000. With a postface by Sadayoshi Kojima.
- [CS83] Marc Culler and Peter B. Shalen. Varieties of group representations and splittings of 3-manifolds. *Ann. of Math. (2)*, 117(1) :109–146, 1983.
- [Cur94] Cynthia L. Curtis. Generalized Casson invariants for $SO(3)$, $U(2)$, $Spin(4)$, and $SO(4)$. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 343(1) :49–86, 1994.
- [DK07] Jérôme Dubois and Rinat Kashaev. On the asymptotic expansion of the colored Jones polynomial for torus knots. *Math. Ann.*, 339(4) :757–782, 2007.
- [dR67] Georges de Rham. Introduction aux polynômes d’un nœud. *Enseignement Math. (2)*, 13 :187–194 (1968), 1967.
- [Dub03] Jérôme Dubois. *Torsion de Reidemeister non abélienne et forme volume sur l’espace des représentations du groupe d’un nœud*. PhD thesis, Université Blaise Pascal., 2003.
- [Dub06] Jérôme Dubois. Non abelian twisted Reidemeister torsion for fibered knots. *Canad. Math. Bull.*, 49(1) :55–71, 2006.
- [FK91] Charles D. Frohman and Eric P. Klassen. Deforming representations of knot groups in $SU(2)$. *Comment. Math. Helv.*, 66(3) :340–361, 1991.
- [Fri04] Stefan Friedl. Eta invariants as sliceness obstructions and their relation to Casson-Gordon invariants. *Algebr. Geom. Topol.*, 4 :893–934 (electronic), 2004.

- [FS87] Roger Fenn and Denis Sjerve. Massey products and lower central series of free groups. *Canad. J. Math.*, 39(2) :322–337, 1987.
- [Gol84] William M. Goldman. The symplectic nature of fundamental groups of surfaces. *Adv. in Math.*, 54(2) :200–225, 1984.
- [Gor78] C. McA. Gordon. Some aspects of classical knot theory. In *Knot theory (Proc. Sem., Plans-sur-Bex, 1977)*, volume 685 of *Lecture Notes in Math.*, pages 1–60. Springer, Berlin, 1978.
- [GR07] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik. *Table of integrals, series, and products*. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, seventh edition, 2007. Translated from the Russian, Translation edited and with a preface by Alan Jeffrey and Daniel Zwillinger, With one CD-ROM (Windows, Macintosh and UNIX).
- [Har79] Richard Hartley. Metabelian representations of knot groups. *Pacific J. Math.*, 82(1) :93–104, 1979.
- [Her97] Christopher M. Herald. Existence of irreducible representations for knot complements with nonconstant equivariant signature. *Math. Ann.*, 309(1) :21–35, 1997.
- [Heu03] Michael Heusener. An orientation for the $SU(2)$ -representation space of knot groups. In *Proceedings of the Pacific Institute for the Mathematical Sciences Workshop “Invariants of Three-Manifolds” (Calgary, AB, 1999)*, volume 127, pages 175–197, 2003.
- [HK98] Michael Heusener and Jochen Kroll. Deforming abelian $SU(2)$ -representations of knot groups. *Comment. Math. Helv.*, 73(3) :480–498, 1998.
- [HKL] Christopher Herald, Paul Kirk, and Charles Livingston. Metabelian representations, twisted Alexander polynomials, knot slicing and mutation. arXiv :0804.1355.
- [HP05] Michael Heusener and Joan Porti. Deformations of reducible representations of 3-manifold groups into $PSL_2(\mathbb{C})$. *Algebr. Geom. Topol.*, 5 :965–997 (electronic), 2005.
- [HPSP01] Michael Heusener, Joan Porti, and Eva Suárez Peiró. Deformations of reducible representations of 3-manifold groups into $SL_2(\mathbb{C})$. *J. Reine Angew. Math.*, 530 :191–227, 2001.
- [Lam98] T. Y. Lam. A theorem of Burnside on matrix rings. *Amer. Math. Monthly*, 105(7) :651–653, 1998.

- [Lin92] Xiao-Song Lin. A knot invariant via representation spaces. *J. Differential Geom.*, 35(2) :337–357, 1992.
- [LM85] Alexander Lubotzky and Andy R. Magid. Varieties of representations of finitely generated groups. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 58(336) :xi+117, 1985.
- [Mil54] John Milnor. Link groups. *Ann. of Math. (2)*, 59 :177–195, 1954.
- [Mil05] Carl Miller. Exponential iterated integrals and the relative solvable completion of the fundamental group of a manifold. *Topology*, 44(2) :351–373, 2005.
- [Mur08] Kunio Murasugi. *Knot theory & its applications*. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2008. Translated from the 1993 Japanese original by Bohdan Kurpita, Reprint of the 1996 translation [MR1391727].
- [Por97] Joan Porti. Torsion de Reidemeister pour les variétés hyperboliques. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 128(612) :x+139, 1997.
- [Rei88] Miles Reid. *Undergraduate algebraic geometry*, volume 12 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 1988.
- [Rol90] Dale Rolfsen. *Knots and links*, volume 7 of *Mathematics Lecture Series*. Publish or Perish Inc., Houston, TX, 1990. Corrected reprint of the 1976 original.
- [Sav99] Nikolai Saveliev. *Lectures on the topology of 3-manifolds*. de Gruyter Textbook. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1999. An introduction to the Casson invariant.
- [Sav02] Nikolai Saveliev. *Invariants for homology 3-spheres*, volume 140 of *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, Berlin, 2002. Low-Dimensional Topology, I.
- [Sha77] I. R. Shafarevich. *Basic algebraic geometry*. Springer-Verlag, Berlin, study edition, 1977. Translated from the Russian by K. A. Hirsch, Revised printing of Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Vol. 213, 1974.
- [Sho91] D. J. Shors. *Deforming Reducible Representations of Knot Groups in $SL_2(\mathbb{C})$* . U.C.L.A., 1991. Thesis.

- [Ste74] Robert Steinberg. *Conjugacy classes in algebraic groups*. Springer-Verlag, Berlin, 1974. Notes by Vinay V. Deodhar, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 366.
- [Wei64] André Weil. Remarks on the cohomology of groups. *Ann. of Math. (2)*, 80 :149–157, 1964.